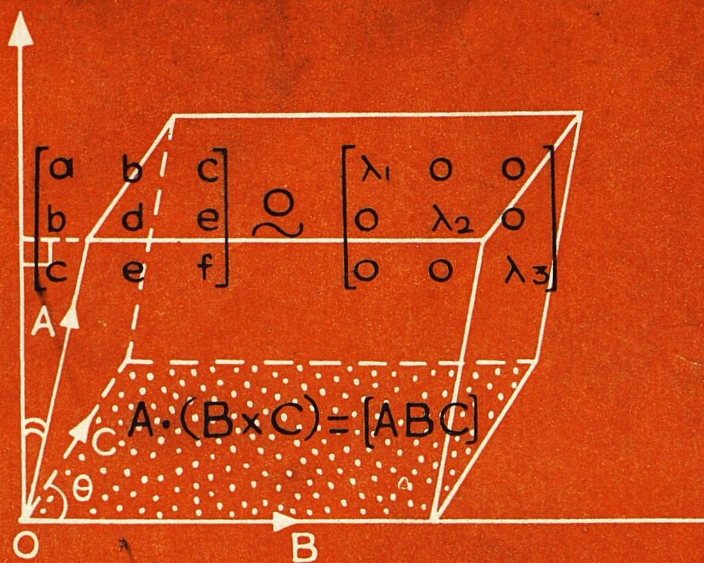
அணிகளும் வெக்டர்களும்

(பொறியியற் கணக்கு — பகுதி 3)

MATRICES AND VECTORS
(ENGINEERING MATHEMATICS — PART III)



பெ. ரா. கிருஷ்ணமூர்த்தி





...ட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

த. பா. நி. (க. வெ.) வரிசை எண் — 661

அணிகளும் வெக்டர்களும்

(பொறியியற் கணக்கு – பகுதி 3)

(திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின்படி வெளியிடப்படுகிறது)

ஆசிரியர்

பெ. ரெ. கிருட்டிணமூர்த்தி, எம். ஏ.,

விரிவுரையாளர், கணக்கியல் துறை,
மண்டலப் பொறியியற் கல்லூரி,
திருச்சி.



தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition — November, 1975

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 661

MATRICES AND VECTORS
(Engineering Mathematics - Part III)

P. R. KRISHNAMOORTHY

Price Rs. 14-80

Published by the Tamilnadu Textbook Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.

KUMARAN PRESS,
298, Mint Street,
Madras-600001.

அணிந்துரை

திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்
(தமிழகக் கல்வி அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பதினைந் தாண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பட்டப் படிப்பு வகுப்புவரை மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்றுவருகின்றனர். 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன் வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளில் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்றுவருகிறது. இவ்வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்களுக்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக் கழகமும், சென்னைப் பல்கலைக் கழகமும் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், மெய்ப் பொருளியல், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதம், இயற்பியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல், சட்டம் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் மூல நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான 'அணிகளும் வெக்டர்களும்' (பொறியியற் கணக்கு - பகுதி 3) என்ற இந் நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் 661 ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான 35 நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை 696 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

தமிழில் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும் என்பதே நம் குறிக்கோளாகும். கல்லூரிகளிலும் பல்கலைக் கழகங்களிலும், கலையியற் பாடங் களையும், அறிவியற் பாடங்களையும், தொழில்நுட்ப அறிவுப் பாடங்களையும் பயிலுகின்ற மாணவர்கள், அவற்றைத் தமிழில் பயில வேண்டும் என்பதை வலியுறுத்தி வருவதற்குக் காரணம், தமிழறிவு வளரவேண்டும் என்பதைவிட, தமிழ் மக்களின் அறிவு ஆற்றல் எளிதாக, விரைவாக வளர வேண்டும் என்பதுதான். 'எதிலும் தமிழ் எங்கும் தமிழ்' என்ற குறிக்கோளை நிறைவேற்ற வேண்டிய கடப்பாடு, தமிழகத்து ஆசிரியப் பெருமக்களையும் மாணவர்களையும் சார்ந்ததாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக்கழகங் களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் தம் மனம் கலந்த நன்றி உரியதாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

பொருளடக்கம்

I. அணிகள்

II. வெக்டர் பகுவியல்

I. அணிகள்

(MATRICES)

1. அணி கோவைகள்

(DETERMINANTS)

§ 1. அணிகோவை

நீளமான கோவைகளை (expressions) எளிதாக நினைவில் கொள்வதற்கும், சுருக்கமாக எழுதுவதற்கும் தொடக்கத்தில் அணிகோவை (determinant) என்ற ஒருவகைக் குறியீடு (notation) பயன்படுத்தப்பட்டது. நாளடைவில் ஒருங்கைச் சமன்பாடுகளின் (simultaneous equations) தீர்வு காண்பதற்கும், ஒருங்கைச் சமன்பாடுகளிலிருந்து வேண்டப்படாத கணியங்களை விலக்குவதற்கும், சில சிக்கலான (complicated) கோவைகளின் பண்புகளை எளிய முறையில் அறிந்துகொள்வதற்கும் அணி கோவைகள் பயன்படுவதைக் கண்டனர். மேலும், அணி தத்துவத்திலும் (Matrix theory) அணிகோவை சிறப்பான இடத்தைப் பெற்றிருக்கிறது.

பின்வரும் 2 தெரியாக் கணியங்கள் (unknown quantities) x, y ஆகியவற்றைக் கொண்ட 2 ஒருங்கைச் சமன்பாடுகளை ஆராய்வோம்.

$$a_1 x + b_1 y = 0 \qquad \dots \qquad \dots \qquad (1)$$

$$a_2 x + b_2 y = 0 \qquad \dots \qquad \dots \qquad (2)$$

இவற்றிற்கு $x = 0$, $y = 0$ என்பவை எப்போதும் தீர்வுகள் (solutions) ஆகும். இவற்றை அற்பத் தீர்வுகள் (trivial solutions) என்று கூறுவர். $x=0$, $y=0$ தவிர மற்றத் தீர்வுகள் உண்டானால், அவற்றிற்கு அற்பமல்லாத (non-trivial) தீர்வுகள் என்று பெயர். மேற்கண்ட ஒருங்கைச் சமன்பாடுகளுக்கு அற்பமல்லாத தீர்வுகள் உண்டா என ஆராய்வோம்.

சமன்பாடு (1)-லிருந்து $x = -\frac{b_1}{a_1} y$

இதைச் சமன்பாடு (2)-ல் பிரதியிட்டால், $a_2 \left(\frac{-b_1}{a_1}\right) y + b_2\, y = 0$

அற்பமல்லாத தீர்வுக்கு $y \neq 0$.

எனவே, $\frac{-a_2\, b_1}{a_1} + b_2 = 0$

அதாவது, $a_1\, b_2 - a_2\, b_1 = 0$ ... ... (3)

இதிலிருந்து, சமன்பாடுகள் (1), (2) அற்பமல்லாத தீர்வு களைப் பெறுவதற்கான நிபந்தனை (3) என்று தெரிகிறது.

இந்த நிபந்தனை (3) ஐ $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$

என்ற குறியீட்டால் குறிப்பது வழக்கம்.

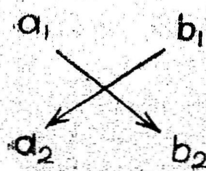
$a_1\, b_2 - a_2\, b_1$ என்ற கோவையைக் குறிக்கும் $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ என்ற குறியீட்டை அணிகோவை என்று வழங்குவர்.

§2. வரைவிலக்கணங்கள்

§2-1. a_1, b_1, a_2, b_2 என்ற நான்கு $(= 2^2)$ மெய் அல்லது கலப்புக் (real or complex) கணியங்கள், இரண்டு நிரை (row) களிலும், இரண்டு நிரல் (column)களிலும் எழுதப்படும் $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ என்ற குறியீட்டுக்கு இரண்டாந்தர அணிகோவை (determinant of the second order) என்று பெயர்.

இந்த 2ஆம் தர அணிகோவையின் பெறுமானம் (value) $a_1\, b_2 - a_2\, b_1$ என்ற ஈருறுப்புக் $(\lfloor 2 = 2)$ கோவைக்குச் சமம் ஆகும்.

இதைப் பின்வரும் முறையில் நினைவில் கொள்ளலாம்.



படம் 1-1.

வலப்பக்கத்தைக் குறிக்கும் அம்புக் குறிக்குள் அடங்கிய கணியங்களைப் பெருக்கி + குறியுடனும், இடப்பக்கத்தைக் குறிக்கும் அம்புக் குறிக்குள் அடங்கிய கணியங் களைப் பெருக்கி − குறியுடனும் கொள்ள வேண்டும்.

§2-2. $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$ ஆகிய 9 ($=3^2$) மெய் அல்லது கலப்புக் கணியங்களை 3 நிரைகளிலும், 3 நிரல்களிலும்

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

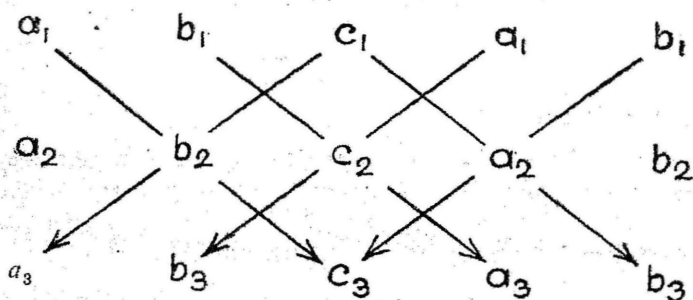
என எழுதப்படும் குறியீட்டுக்கு **3ஆம் தர அணிகோவை** என்று பெயர்.

இதன் பெறுமானம்

$$a_1\ b_2\ c_3 + a_2\ b_3\ c_1 + a_3\ b_1\ c_2 - a_3\ b_2\ c_1 - a_2\ b_1\ c_3 - a_1\ b_3\ c_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (A)$$

என்ற ($|\underline{3}$ $(=6)$ உறுப்புகள் கொண்ட கோவைக்குச் சமம் ஆகும்.

இதை §2-1-ல் கூறிய அம்புக்குறி விளக்கத்தைக் கொண்டு பின்வருமாறு நினைவில் கொள்ளலாம்.



படம் 1-2.

A)-ல் உள்ள 6 உறுப்புகளை

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \quad \ldots \quad (B)$$

என்ற மூன்று இரண்டாம்தர அணிகோவைகளிலிருந்தும் பெற முடியும் என்பதை ஓர்க. அதாவது $(A) = (B)$.

[குறிப்புகள் (1) : $a_1, b_1 \ldots$ ஆகியவற்றை அணிகோவையின் மூலகங்கள் (elements) என்பர்.

(2) பொதுவாக | | என்ற அடையாளம் ஒரு கணியத்தின் தனிப் பெறுமானத்தைக் (absolute value) குறிக்கப் பயன்படுகிறது. அணிகோவைக்கும் இதே அடையாளத்தைப் பயன்படுத்துவதி

லிருந்து அந்த அணிகோவையின் தனிப் பெறுமானத்தைக் குறிப்பதாகக் கொள்ளலாகாது. இந்த அதிகாரத்தைப் பொறுத்த மட்டில் | | என்ற குறியீடு அணிகோவையைக் குறிப்பதாகக் கொள்ள வேண்டும். தனிப் பெறுமானத்தைக் குறிக்க விரும்பும் போது அது விளக்கமாக, 'தனிப் பெறுமானம்' என்று எழுதிக் காண்பிக்கப்படும்.]

§ **3.** குறியீடு

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

என்ற மூன்ருந்தர அணிகோவையில் உள்ள மூலகங்களை ஒற்றைக்கீழ்க் குறி (single subscript) யுடன் எழுதுவதற்குப் பதிலாக

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

என்று இரட்டைக் கீழ்க் குறி (double subscripts) யுடன் எழுதுவதால் சில நன்மைகள் உண்டு. முக்கியமாக இரட்டைக் கீழ்க்குறிகள் ஒரு மூலகத்தின் நிரை நிரல்களை வெளிப்படையாக அறிவிக்கின்றன. a_{rs} என்பது r ஆவது நிரையிலும், s ஆவது நிரலிலும் உள்ள மூலகமாகும்.

மேலே உள்ள அணிகோவையை $|a_{rs}|_{(3)}$ எனச் சுருக்கமாக எழுதுவது மரபு. ஐயம் எழாதபோது $|a_{rs}|$ என்றும் எழுதலாம். $|A|$, $|B|$, $|C|$ போன்ற குறியீடுகளாலும் அணிகோவைகள் குறிக்கப்படுவதுண்டு.

§ **4.** **சிற்றணிகோவையும் இணைக்காரணியும் (Minor and co-factor)**

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rs} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

என்ற n-தரமுள்ள அணிகோவையில் r ஆவது நிரையிலும் s ஆவது நிரலிலும் உள்ள மூலகம் a_{rs}. அந்த r ஆவது நிரையையும், s ஆவது நிரலையும் நீக்கிவிட்ட பின்னர் கிடைக்கும் $(n-1)$ தரமுள்ள அணிகோவைக்கு a_{rs}-ன் சிற்றணிகோவை (minor of the elements a_{rs}) என்று பெயர். இச் சிற்றணிகோவை M_{rs} என்ற குறியீட்டால் குறிக்கப்படும். ஆனால் $(-1)^{r+s} M_{rs}$ என்ற அணிகோவையை a_{rs}-ன் இணைக்காரணி (co-factor of a_{rs}) என்று கூறுவர். இதை A_{rs} என்று குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

அதாவது, $A_{rs} = (-1)^{r+s} M_{rs}$.

அல்லது, a_{rs}-ன் இணைக்காரணி $= (-1)^{r+s}$ (a_{rs}-ன் சிற்றணிகோவை).

எடுத்துக்காட்டு :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ என்றால்,}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11}$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12}$$
$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = M_{13}$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{13} = -M_{13}$$
$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = M_{22}$$
$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}$$
$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = M_{31}$$

$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32}$

$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = M_{33}$

[குறிப்பு: § 2-2-ல் விளக்கிய 3ஆம் தர அணிகோவையின் மதிப்பையும் [சமன்பாடு (*B*)], இணைக்காரணியின் வரைவிலக்கணத்தையும் இணைத்து நோக்கினால்,

$$|A| = a_{11} M_{11} - a_{12} M_{12} + a_{13} M_{13}$$
$$= a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$$

என்பது தெளிவாகும்.

§ 4-1. வரைவிலக்கணம்

$|a_{rs}|_{(4)}$ என்ற 4ஆம் தர அணிகோவை

$$a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} + a_{14} A_{14}$$

என்ற கோவைக்குச் சமம் ஆகும்.

n - தரமுள்ள அணிகோவைக்கும் இந்த வரைவிலக்கணம் பொருந்தும்.

அதாவது,

$$|a_{rs}|_{(n)} = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \dots + a_{1n} A_{1n}$$

மேற்கூறிய முறையில் n-தரமுள்ள அணிகோவையை $(n-1)$ தரமுள்ள அணிகோவைகளின் ஒருபடிச் சேர்மானமாக (linear combination) விரித்து எழுதுவதற்கு லாப்லாசு விரிவு (Laplace Expansion) என்று பெயர்.

§ 5. அணிகோவையின் பண்புகள் (Properties of a determinant)

கீழ் வரும் பண்புகளை விளக்குவதற்கு

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{32} a_{23} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}$$

என்ற 3ஆம் தரமுள்ள அணிகோவையை எடுத்துக்கொள்வோம். இந்த 3ஆம் தரமுள்ள அணிகோவையைக் கொண்டு தேற்றங்களை நிறுவியபோதிலும், எல்லாத் தரமுள்ள அணிகோவைகளுக்கும் அவை பொருந்தும் என்பதை அறிய வேண்டும்.

§ 5-1. $|A|$ என்ற அணிகோவையின் நிரைகளை நிரல்களாகவும், நிரல்களை நிரைகளாகவும் மாற்றியபின் கிடைக்கும் அணிகோவை $|A^T|$ எனில், $|A^T| = |A|$

$|A^T|$ -க்கு நிரை நிரல் மாற்று அணிகோவை அல்லது திருப்பு அணிகோவை (transposed determinant) என்று பெயர்.

நிறுவல் :

$$|A^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22}$$

$$= |A|.$$

[குறிப்பு : மேற் கூறிய பண்பிலிருந்து ஓர் அணிகோவையின் நிரைகளைப் பொறுத்துக் கிடைக்கும் விளைவுகளெல்லாம் நிரல்களுக்கும் பொருந்தும் என்று தெளிவாகிறது. எனவே, அணிகோவை தேற்றங்களில் நிரையைப் பொறுத்து நிறுவல் செய்த பின்னர் நிரலைப் பொறுத்து நிறுவல் செய்ய வேண்டிய தேவை இல்லை.]

§ 5-2. ஓர் அணிகோவையில் எந்த இரண்டு நிரைகளையும் (நிரல்களையும்) மாற்றி அமைத்தாலும் அந்த அணிகோவையின் தனிப் பெறுமானம் (absolute value) மாறாது. ஆனால், அதன் குறி (sign) மட்டும் மாறும்.

$|A|$ -ல் முதல் இரண்டு நிரைகளை மாற்றி எழுதிக் கிடைக்கும் அணிகோவை $|D|$ எனில்,

$$|D| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) - a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) + a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})$$

$$= a_{21}\, a_{12}\, a_{33} - a_{21}\, a_{32}\, a_{13} - a_{22}\, a_{11}\, a_{33}$$
$$+ a_{22}\, a_{31}\, a_{13} + a_{23}\, a_{11}\, a_{32} - a_{23}\, a_{31}\, a_{12}$$
$$= - |A|$$

§ 5-3. $$|\mathbf{A}| = \mathbf{a}_{11}\, \mathbf{A}_{11} + \mathbf{a}_{12}\, \mathbf{A}_{12} + \mathbf{a}_{13}\, \mathbf{A}_{13}$$
$$= \mathbf{a}_{21}\, \mathbf{A}_{21} + \mathbf{a}_{22}\, \mathbf{A}_{22} + \mathbf{a}_{23}\, \mathbf{A}_{23}$$
$$= \mathbf{a}_{31}\, \mathbf{A}_{31} + \mathbf{a}_{32}\, \mathbf{A}_{32} + \mathbf{a}_{33}\, \mathbf{A}_{33}$$
$$= \mathbf{a}_{11}\, \mathbf{A}_{11} + \mathbf{a}_{21}\, \mathbf{A}_{21} + \mathbf{a}_{31}\, \mathbf{A}_{31}$$
$$= \mathbf{a}_{12}\, \mathbf{A}_{12} + \mathbf{a}_{22}\, \mathbf{A}_{22} + \mathbf{a}_{32}\, \mathbf{A}_{32}$$
$$= \mathbf{a}_{13}\, \mathbf{A}_{13} + \mathbf{a}_{23}\, \mathbf{A}_{23} + \mathbf{a}_{33}\, \mathbf{A}_{33}$$

இப்போது, $a_{21}\, A_{21} + a_{22}\, A_{22} + a_{23}\, A_{23}$

$$= -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= - a_{21}\, (a_{12}\, a_{33} - a_{32}\, a_{13})$$
$$+ a_{22}\, (a_{11}\, a_{33} - a_{31}\, a_{13})$$
$$- a_{23}\, (a_{11}\, a_{32} - a_{31}\, a_{12})$$
$$= - a_{21}\, a_{12}\, a_{33} + a_{21}\, a_{32}\, a_{13}$$
$$+ a_{22}\, a_{11}\, a_{33} - a_{22}\, a_{31}\, a_{13}$$
$$- a_{23}\, a_{11}\, a_{32} + a_{23}\, a_{31}\, a_{12}$$
$$= |A|$$

மேலும், $a_{11}\, A_{11} + a_{21}\, A_{21} + a_{31}\, A_{31}$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\, (a_{22}\, a_{33} - a_{23}\, a_{32})$$
$$- a_{21}\, (a_{12}\, a_{33} - a_{13}\, a_{32})$$
$$+ a_{31}\, (a_{12}\, a_{23} - a_{13}\, a_{22})$$
$$= |A|$$

இவ்வாறே மற்றவற்றையும் நிறுவலாம்.

[குறிப்பு : மேற்கூறிய முறைகளில் ஓர் அணிகோவையை விரித்து எழுதுவதற்கு லாப்லாசு விரித்தல் முறை (Laplace's method of expansion of a determinant) என்றுபெயர்.]

§ 5-4.

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_{11}\,\mathbf{A}_{21} + \mathbf{a}_{12}\,\mathbf{A}_{22} + \mathbf{a}_{13}\,\mathbf{A}_{23} &= 0\\
\mathbf{a}_{11}\,\mathbf{A}_{31} + \mathbf{a}_{12}\,\mathbf{A}_{32} + \mathbf{a}_{13}\,\mathbf{A}_{33} &= 0\\
\mathbf{a}_{21}\,\mathbf{A}_{11} + \mathbf{a}_{22}\,\mathbf{A}_{12} + \mathbf{a}_{23}\,\mathbf{A}_{13} &= 0\\
\mathbf{a}_{21}\,\mathbf{A}_{31} + \mathbf{a}_{22}\,\mathbf{A}_{32} + \mathbf{a}_{23}\,\mathbf{A}_{33} &= 0\\
\mathbf{a}_{31}\,\mathbf{A}_{11} + \mathbf{a}_{32}\,\mathbf{A}_{12} + \mathbf{a}_{33}\,\mathbf{A}_{13} &= 0\\
\mathbf{a}_{31}\,\mathbf{A}_{21} + \mathbf{a}_{32}\,\mathbf{A}_{22} + \mathbf{a}_{33}\,\mathbf{A}_{23} &= 0
\end{aligned}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ என்றால்

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -(a_{12}\,a_{33} - a_{32}\,a_{13})$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}\,a_{33} - a_{31}\,a_{13})$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -(a_{11}\,a_{32} - a_{31}\,a_{12})$$

$$\begin{aligned}
\therefore\ a_{11}\,A_{21} + a_{12}\,A_{22} + a_{13}\,A_{23}
&= -a_{11}\,(a_{12}\,a_{33} - a_{32}\,a_{13})\\
&\quad + a_{12}\,(a_{11}\,a_{33} - a_{31}\,a_{13})\\
&\quad - a_{13}\,(a_{11}\,a_{32} - a_{31}\,a_{12})\\
&= -a_{11}\,a_{12}\,a_{33} + a_{11}\,a_{32}\,a_{13} + a_{12}\,a_{11}\,a_{33}\\
&\quad - a_{12}\,a_{31}\,a_{13} - a_{13}\,a_{11}\,a_{32} + a_{13}\,a_{31}\,a_{12}\\
&= 0
\end{aligned}$$

இவ்வாறே மற்றவற்றையும் நிறுவலாம்.

§ 5–5. ஓர் அணிகோவையின் ஏதாவதொரு நிரையின் (நிரலின்) எல்லா மூலகங்களும் சுழி (zero) யானால், அந்த அணி கோவையின் மதிப்பும் சுழியாகும்.

மூலகங்கள் எல்லாம் சுழியாக உள்ள நிரையினால் (நிரலினால்) லாப்லாசு விரித்தல் முறைப்படி விரித்தெழுதினால், அந்த அணி கோவையின் மதிப்புச் சுழி என்பது தெளிவாகும்.

§ 5–6 $|A|$ என்ற அணிகோவையின் ஏதாவதொரு நிரை யின் (நிரலின்) எல்லா மூலகங்களையும் C என்ற மாறு எண்ணால் (constant number) பெருக்கினால், அந்த அணிகோவையின் மதிப்பு $C|A|$ ஆகும்.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ என்ற அணிகோவையில்

a_{rs}-ன் இணைக்காரணி A_{rs} என்று எழுதப்படுகிறது.

$|A|$ ஐ 2 ஆவது நிரையினால் விரித்து எழுதினால்,

$$|A| = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

$|A|$-ல் உள்ள 2ஆவது நிரையில் உள்ள எல்லா மூலகங்களையும் cஆல் பெருக்கிய பின்னர் கிடைக்கும் அணியை $|D|$ என்று குறிப்பிட்டால்,

$$|D| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ca_{21}, ca_{22}, ca_{23} ஆகிய மூலகங்களின் இணைக்காரணிகள் முறையே A_{21}, A_{22}, A_{23} என அறியலாம். எனவே, $|D|$ ஐ இரண்டாவது நிரையினால் விரித்தெழுதினால்

$$\begin{aligned} |D| &= ca_{21}A_{21} + ca_{22}A_{22} + ca_{23}A_{23} \\ &= c(a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}) \\ &= c\,|A| \end{aligned}$$

§ **5-7.** **ஓர் அணிகோவையின் ஏதாவது இரண்டு நிரைகளும் (நிரல்களும்) முற்றொருமையாக (identical) இருந்தால், அந்த அணிகோவையின் மதிப்புச் சுழியாகும்.**

இரு நிரைகள் முற்றொருமையாக உள்ள அணிகோவையை $|B|$ என்க. முற்றொருமையாக உள்ள அந்த நிரைகளை மாற்றி எழுதினால் §5-2-ல் கூறியபடி அதன் மதிப்பு $-|B|$ ஆகும். ஆனால், முற்றொருமையாக உள்ள நிரைகளை மாற்றி எழுதினால் $|B|$ மாறாது.

எனவே, $|B| = -|B|$

அதாவது, $2|B| = 0$

$\therefore \quad |B| = 0$

துணைமுடிவு (Corollary)

ஓர் அணிகோவையில் ஏதாவது இரு நிரை (நிரல்)களின் மூலகங்கள் விகிதசமத்தில் இருந்தால், அந்த அணிகோவையின் மதிப்புச் சுழியாகும்.

§ **5-8.** **பின்வரும் தேற்றம் குறியீடுகளால் தரப்படுகிறது :**

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

இடப் பக்கத்து அணிகோவையை முதல் நிரையினால் விரித்தெழுதினால், அதன் மதிப்பு

$$= (a_{11}+b_{11})\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - (a_{12}+b_{12})\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (a_{13}+b_{13})\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$+ b_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - b_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + b_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

§ 5-9. k என்பது ஏதாவதொரு மாறா எண் என்க. ஓர் அணிகோவையில் ஒரு நிரையின் எல்லா மூலகங்களோடு மற்றொரு நிரையின் ஒத்த மூலகங்களை k ஆல் பெருக்கி வந்த பெருக்கல் பலன்களைக் கூட்டினால் அந்த அணிகோவையின் மதிப்பு மாறாது.

அதாவது, $$|D| = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |A|$$

அணிகோவை $|D|$-ல் §5–8 ஐப் பயன்படுத்தினால்,

$$|D| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= |A| + k\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= |A| + 0 \quad (\S 5\text{-}7)$$

$$= |A|$$

துணை முடிவு

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21}+la_{31} & a_{12}+ka_{22}+la_{32} & a_{13}+ka_{23}+la_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

[குறிப்புகள் **(1)** : § 5-6, § 5-9 ஆகியவற்றை மீண்டும் மீண்டும் பயன்படுத்தி ஒரு நிரையின் (நிரல்) பல மூலகங்களைச் சுழியாக்கலாம். இவ்வாறு பல மூலகங்கள் சுழியாக்கப்பட்ட நிரையினால் (நிரலினால்) அந்த அணிகோவையை விரித்தெழுதினால், அணிகோவையின் மதிப்புக் காணும் பணி பெரிதும் எளிதாகும்.

(2) § 5-9 ஐப் பயன்படுத்தும்போது ஏதாவதொரு நிரையை (நிரலை) மாற்றாமல் அப்படியே வைத்திருக்கவேண்டும் என்பதை நினைவில் கொள்ளவேண்டும்.]

எடுத்துக்காட்டு :

$$\begin{vmatrix} ka_{11}+la_{21}+ma_{31} & ka_{12}+la_{22}+ma_{32} & ka_{13}+la_{23}+ma_{33} \\ a_{21} & a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

§ **5-10.** ஓர் அணிகோவை $|A|$ ஐ x-ன் சார்பாகக் கொள்க. அதாவது, $|A| = f(x)$ $|A|$-ல், $x = a$ எனப் பிரதியிட்டு, ஏதாவது இரண்டு நிரைகள் (நிரல்கள்) முற்றொருமைகள் ஆகிவிட்டால், $x - a$ என்பது அந்த அணிகோவையின் ஒரு காரணியாகும்.

$x = a$ என்று பிரதியிடுவதால் $|A|$-ன் இரண்டு நிரைகள் முற்றொருமையானால், § 5-7-ல் விளக்கியபடி $|A| = 0$ ஆகும்.

அாதவது, $f(a) = 0$. எனவே, மீதித் தேற்றத்தின்படி $x - a$ என்பது $f(x)$-ன், அதாவது $|A|$-ன் ஒரு காரணியாகும்.

துணை முடிவு

$x = a$ என்று பிரதியிடுவதால் $|A|$-ன் r நிரைகள் (நிரல்கள்) முற்றொருமையானால், $(x - a)^{r-1}$ என்பது $|A|$-ன் காரணியாகும்.

§ 6. குறியீடு

கணக்குகளைச் செய்யும்போது பின்வரும் குறியீட்டைப் பயன் படுத்தலாம் :

$$C_k \rightarrow C_k + aC_l + bC_m$$

என்றால், 'l ஆவது நிரலில் உள்ள எல்லா மூலகங்களையும் a ஆல் பெருக்கி, m ஆவது நிரலிலுள்ள எல்லா மூலகங்களையும் b ஆல் பெருக்கி இவற்றை k ஆவது நிரலில் உள்ள ஒத்த (corresponding) மூலகங்களோடு கூட்டுக.' மேற்கூறிய செய்கையை (operation) நிரைக்குப் பயன்படுத்தும்போது,

$$R_k \rightarrow R_k + aR_l + bR_m$$

என்று எழுதப்படும்.

மாதிரிக்கணக்கு (1)

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 & 3 \\ 7 & 6 & 7 & 3 \\ -4 & -4 & -4 & 2 \\ 5 & 3 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

என்ற அணிகோவையின் மதிப்பைக் காண்க.

$C_1 \rightarrow C_1 + 2C_4$; $C_2 \rightarrow C_2 + 2C_4$; மற்றும் $C_3 \rightarrow C_3 + 2C_4$ என்று மாற்றியமைத்தால்

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} 9 & 10 & 12 & 3 \\ 13 & 12 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 13 & 11 & 15 & 4 \end{vmatrix}$$

முதலில் 3 ஆவது நிரையினால் விரித்தெழுதுக.

$$|\Delta| = 2 \times (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 9 & 10 & 12 \\ 13 & 12 & 13 \\ 13 & 11 & 15 \end{vmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - R_2$ என மாற்றியமைத்தால்,

$$|\Delta| = -2 \begin{vmatrix} 9 & 10 & 12 \\ 13 & 12 & 13 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

பின்னர் $C_3 \to C_3 + 2C_2$ என மாற்றியமைத்தால்

$$|\Delta| = -2 \begin{vmatrix} 9 & 10 & 32 \\ 13 & 12 & 37 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

இனி, 3ஆவது நிரையினுல் விரித்தெழுதினுல்

$$|\Delta| = -2 \times (-1) \times (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 9 & 32 \\ 13 & 37 \end{vmatrix}$$

$$= -2(9 \times 37 - 13 \times 32)$$

$$= -2(333 - 416)$$

$$= -2(-83)$$

$$\therefore \quad |\Delta| = 166$$

நாதிரிக்கணக்கு (2)

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} 1 + a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & 1 + a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & 1 + a_n \end{vmatrix}$$

$= 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$ என்று **நிறுவுக.**

$C_1 \to C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_n$ என மாற்றியமைத்தால்,

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} 1+\Sigma a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ 1+\Sigma a_1 & 1+a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ 1+\Sigma a_1 & a_2 & a_3 & & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$= (1+\Sigma a_1) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ 1 & 1+a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ 1 & a_2 & a_3 & \ldots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$= (1+\Sigma a_1) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & & \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

$(C_2 \to C_2 - C_1$
$C_3 \to C_3 - C_1$
$C_n \to C_n - C_1)$

$= (1 + \Sigma a_1)(1 \times 1 \times \ldots \times 1)$ (முதல் நிரையினுல் விரித்தெழுதினுல்)

$= 1 + \Sigma a_1$

$= 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

மாதிரிக்கணக்கு (3)

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$= (a-b)(b-c)(c-a)$

என நிறுவுக.

$|\Delta|$ வில் $b = c$ என்று பிரதியிட்டால்,

அந்த அணிகோவை $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & c & c \\ a^2 & c^2 & c^2 \end{vmatrix}$ என மாறும்.

ஆனால், இந்த அணிகோவையில் ஈற்றிரண்டு நிரல்கள் முற்றொருமை. எனவே இதன் மதிப்பு சுழி.

$\therefore$ $(b - c)$ என்பது $|\Delta|$-ன் ஒரு காரணி (§5–7). $|\Delta|$ என்பது a, b, c–களில் வட்டச் சமச்சீரணி கோவை (determinant of cyclic symmetry). ஆகையால் $(c - a)$, $(a - b)$ என்பவையும் $|\Delta|$-ன் காரணிகளே. மேலும் $|\Delta|$, a, b, c–களில் 3 ஆவது படித் தரமுள்ள அணிகோவையாகையால், $(b - c) \times (c - a) \times (a - b)$ என்ற 3 ஆவது படித் தரமுள்ள கோவையைத்தவிர மாறு எண்ணுல் ஆன காரணிதான் இருக்க முடியும். k மாறுஎண் எனில்,

$$|\Delta| \equiv k(b - c)(c - a)(a - b). \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

மேற்கண்ட முற்றொருமைச் சமன்பாட்டில், $a = 1$, $b = -1$, $c = 0$ என்று பிரதியிட்டால்

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = k(-1 - 0)(0 - 1)(1 + 1)$$

அதாவது, $1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = k(-1)(-1)(2)$

அதாவது, $2 = 2k$

$\therefore$ $k = 1$

$\therefore$ $|\Delta| = (b - c)(c - a)(a - b)$.

[குறிப்பு: k-ன் மதிப்பைக் காண்பதற்குப் பின்வரும் முறையையும் பின்பற்றலாம்:

முற்றொருமைச் சமன்பாடு (1)-ல், இடப்பக்கத்துக் கோவையில் ஓர் உறுப்பு bc^2; வலப்பக்கத்தில் அதே உறுப்பு bc^2-ன் குணகம் k.

$\therefore$ $1 = k$]

மாதிரிக்கணக்கு (4)

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

$= 2\,abc\,(a+b+c)^3$ என நிறுவுக.

(B. Tech, '70 ; Kerala Engg. '63, '66)

$|\Delta|$-ல் $b+c=-a,\ \ c+a=-b,\ \ a+b=-c$ எனப் பிரதியிட்டால், அந்த அணிகோவை

$$\begin{vmatrix} a^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & c^2 \end{vmatrix}$$ என மாறும்.

இதில் 3 நிரல்களும் முற்றொருமை. எனவே, $(a+b+c)^2$ என்பது $|\Delta|$-ன் ஒரு காரணி.

$|\Delta|$-ல் $a=0$ எனப் பிரதியிட்டால், அந்த அணிகோவை

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & 0 & 0 \\ b^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & b^2 \end{vmatrix}$$ என மாறும்.

இதில் இறுதியாக உள்ள 2 நிரல்கள் முற்றொருமை. ஆகையால், a என்பது $|\Delta|$-ன் ஒரு காரணி.

$|\Delta|$ என்பது வட்டச் சமச்சீரணிகோவையாகையால் b, c என்பவைகளும் காரணிகளாகும்.

$\therefore\ abc\,(a+b+c)^2$ என்ற 5 படிக் கோவை $|\Delta|$-ன் காரணியாகும். ஆனால் $|\Delta|$ சமச்சீருள்ள 6 படிக் கோவை. ஆகவே $k\,(a+b+c)$ என்ற ஒருபடி சமச்சீர் கோவைதான் மற்றொரு காரணியாக இருக்க முடியும்.

$$\therefore\ \ |\Delta| \equiv k\,abc\,(a+b+c)^3 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

சமன்பாடு (1)-ன் இருபக்கங்களிலும் $a = b = c = 1$ எனப் பிரதியிடுக.

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = k \cdot 1 \cdot 1 . 1\,(1 + 1 + 1)^3$$

அதாவது, $$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \\ 6 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 27\,k$$

அதாவது, $$6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 27\,k \quad \begin{pmatrix} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_2 \to R_3 - R_1 \end{pmatrix}$$

அதாவது, $6 \times 3 \times 3 = 27k$

$\therefore \quad k = 2$

எனவே, $|\Delta| = 2abc\,(a + b + c)^3$.

மாதிரிக்கணக்கு (5)

$$f(x) \equiv \begin{vmatrix} a-x & c & b \\ c & b-x & a \\ b & a & c-x \end{vmatrix} = 0$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$C_2 \to C_1 + C_2 + C_2$ என மாற்றியமைத்தால்,

$$f(x) \equiv \begin{vmatrix} (a+b+c) - x & c & b \\ (a+b+c) - x & b-x & a \\ (a+b+c) - x & a & c-x \end{vmatrix} = 0$$

மேலும், $R_2 \to R_2 - R_1$, $R_3 \to R_3 - R_1$ என மாற்றினால்

$$f(x) \equiv (a+b+c-x) \begin{vmatrix} 1 & c & b \\ 0 & b-x-c & a-b \\ 0 & a-c & c-x-b \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \quad (a+b+c-x) \quad [(b-x-c) \quad (c-x-b) - (a-c) \quad (a-b)] = 0$$

அதாவது, $(a+b+c-x)[(-x+b-c)(-x-b+c) -(a^2 - ab - ac + bc)] = 0$

அதாவது, $(a+b+c-x) \quad [x^2 - (b-c)^2 - a^2 + ab + ac - bc] = 0$

அதாவது, $(a+b+c-x) \quad [x^2 - a^2 - b^2 - c^2 + ab + bc + ca] = 0$

$\therefore \quad x = a+b+c$ அல்லது

$$x = \pm\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}$$

§7. இரு அணிகோவைகளின் பெருக்கல்

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad |B| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

என்ற இரு ௨ஆம் தர அணிகோவைகளின் பெருக்கல் (product), $|C| = \begin{vmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} & a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} & a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} \end{vmatrix}$

என்ற ௨ஆம் தர அணிகோவை ஆகும்.

நிறுவல் :

$$|C| = \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{11} b_{12} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} & a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{12} b_{21} & a_{12} b_{22} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} & a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{31} & a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{12} \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} & a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} \end{vmatrix}$$

இப்போது, முதல் அணிகோவையில் $R_2 \rightarrow R_2 - a_{21} \times R_1$ என்றும், இரண்டாவது அணிகோவையில் $R_2 \rightarrow R_2 - a_{22} \times R_1$ என்றும் மாற்றினால்,

$$|C| = a_{11}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + a_{12}a_{21}\begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{11} & b_{12} \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

$$= |A| \times |B|.$$

[குறிப்பு (1): நிறுவல் எளிதாகும் பொருட்டு 2ஆம் தர அணிகோவைகளை எடுத்துக்கொண்டு பெருக்குமுறை காட்டினோம். ஆனல், இந்த முறை சமதரமுள்ள எந்த இரு அணிகோவைகளின் பெருக்கலுக்கும் பொருந்தும்.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad |B| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

என்ற n தர இரு அணிகோவைகளைப் பெருக்கினுல்

$$|C| = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

என்ற n தர அணிகோவை கிடைக்கும்.

இங்கே, $$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$$

அதாவது, பெருக்கிய அணிகோவையை $|C|$-ல் i ஆவது நிரை, j ஆவது நிரலில் உள்ள மூலகமானது $|A|$-ல் i ஆவது நிரைமூலகங்களை $|B|$-ல் j ஆவது நிரல் ஒத்த மூலகங்களால் பெருக்கி அவற்றைக் கூட்டிய தொகைக்குச் சமம் ஆகும்.

குறிப்பு (2): $|A| \times |B| = |B| \times |A|$]

§ 8. அணிகோவை முறையில், சமபடியல்லாத ஒருங்கமை ஒருபடிச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணல்.

3 தெரியாக் கணியங்கள் கொண்ட 3 ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகளைப் பின்வரும் வடிவத்தில் எடுத்துக் கொள்வோம்:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + a_{13}\ x_3 &= b_1 \\ a_{21}\ x_1 + a_{21}\ x_2 + a_{23}\ x_3 &= b_2 \\ a_{31}\ x_1 + a_{32}\ x_2 + a_{33}\ x_3 &= b_3 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

[மாறு உறுப்புகள் (constant terms) வலப் பக்கத்தில் இருப்பதைக் கவனிக்கவும்.]

$$|D| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ எனில்,}$$

$$x_1 |D| = \begin{vmatrix} a_{11}\ x_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}\ x_1 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}\ x_1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + a_{13}\ x_3 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}\ x_1 + a_{32}\ x_2 + a_{23}\ x_3 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}\ x_1 + a_{32}\ x_2 + a_{33}\ x_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$(C_1 \rightarrow C_1 + x_2 \times C_2 + x_3 \times C_3)$$

இந்த அணிகோவையில் சமன்பாடு (1) ஐப் பயன்படுத்தினால்

$$x_1 |D| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |D_1| \text{ என்க.}$$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{|D_1|}{|D|}$$

இதேபோல், $|D_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$,

$|D_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$ என்றால்

$$x_2 = \frac{|D_2|}{|D|}; \quad x_3 = \frac{|D_3|}{|D|}$$

[குறிப்பு (1): $|D|$ என்ற அணிகோவைக்குக் குணக அணி கோவை (coefficient determinant) என்று பெயர்.

(2) மூன்று தெரியாக்கணியங்கள் கொண்ட 3 சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணும் முறையை இங்கே விளக்கியிருந்தபோதிலும், இதே முறை n-தெரியாக்கணியங்கள் கொண்ட n சமன்பாடுகளுக்கும் பொருந்தும்.

(3) மேலே விளக்கிய முறையில் ஒருங்கைச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்பதற்குக் கிராமர் முறை (Cramer's method) என்று பெயர்.

(4) வரைவிலக்கணம்: எந்த விதத் தீர்வும் அமையப் பெறாத ஒருங்கைச் சமன்பாடுகளுக்கு இசைவிலாச் (inconsistent) சமன்பாடுகள் என்று பெயர். ஒரு தீர்வுக் கணம் மட்டுமோ (unique solution set) அல்லது பல தீர்வுக் கணங்களோ அமையப் பெற்ற ஒருங்கைச் சமன்பாடுகளுக்கு இசைவுடைய (consistent) சமன்பாடுகள் என்று பெயர். ஒரே தீர்வுக் கணம் அமையப் பெற்ற ஒருங்கைச் சமன்பாடுகளை "ஒரு தீர்வுக் கணங்கொண்ட இசைவுடைய சமன்பாடுகள்" (consistent equations with a unique solution set) என்பர்.

(5) மேலே விளக்கிய கிராமர் முறையில்

$|D| = 0 = |D_1| = |D_2| = |D_3|$ என்றால்,

கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகள் இசைவுடையன அல்லது இசைவிலாதன என்று அறுதியிட்டுக் கூற இயலாது. ஆனால் $|D| = 0$ என்பதோடு, $|D_1|$, $|D_2|$, $|D_3|$ ஆகியவற்றில் ஏதாவது ஒன்றாவது சுழியில்லை என்றால் அந்தச் சமன்பாடுகள் இசைவிலாதன என உறுதியாகக் கூறலாம்.]

மாதிரிக்கணக்கு (6)

கீழ்வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க:

$$x + 2y + 3z = 14$$
$$3x + 2y + z = 10$$
$$2x - y + 3z = 9$$

இங்கே, $|D| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

$$= 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 7 - 14 - 21 = -28$$

$$|D_1| = \begin{vmatrix} 14 & 2 & 3 \\ 10 & 2 & 1 \\ 9 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 14\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 10\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -28$$

$$|D_2| = \begin{vmatrix} 1 & 14 & 3 \\ 3 & 10 & 1 \\ 2 & 9 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -14\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 10\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 9\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -56$$

$$|D_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 14 \\ 3 & 2 & 10 \\ 2 & -1 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= 14\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 10\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -84$$

$$\therefore \quad x = \frac{|D_1|}{|D|} = \frac{-28}{-28} = 1$$

$$y = \frac{|D_2|}{|D|} = \frac{-56}{-28} = 2$$

$$z = \frac{|D_3|}{|D|} = \frac{-84}{-28} = 3$$

அதாவது, $x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3$

மாதிரிக்கணக்கு (7)

கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகள் இசைவுடையனவா என்று ஆராய்க.

$$x + 2y + 3z = 14$$
$$3x + 2y + z = 10$$
$$6x + 4y + 2z = 25$$

இங்கே, $|D| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

$$= 1\,(4 - 4) - 3\,(4 - 12) + 6\,(2 - 6)$$
$$= 0$$

ஆனால், $|D_1| = \begin{vmatrix} 14 & 2 & 3 \\ 10 & 2 & 1 \\ 20 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

$$= 14\,(4 - 4) - 10\,(4 - 12) + 25\,(2 - 6)$$
$$\neq 0.$$

ஆகவே, [§ 8 குறிப்பு (5)] கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகள் இசைவிலாதவை.

மாதிரிக்கணக்கு (8)

$$x + y + z = 1$$
$$3x + 4y + 5z = 2$$
$$2x + 3y + 4z = 1$$

ஆகிய சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க.

இங்கு, $|D| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

$= 1(16-15) - 1(12-10) + (9-8)$

$= 0$

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (16-15) - (8-5) + (6-4) = 0$$

$$|D_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (8-5) - (12-10) + (3-4) = 0$$

$$|D_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (4-6) - (3-4) + (9-8) = 0$$

இங்கே, $|D|$, $|D_1|$, $|D_2|$, $|D_3|$ ஆகியவை அனைத்தும் சுழியாவதால், கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகள் இசைவுடையனவா இல்லையா என உடனடியாகக் கூறமுடியாது. அவற்றைப் பின்வரும் முறையில் ஆராயலாம் :

முதல் இரண்டு சமன்பாடுகளிலிருந்து x, y ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை z வழியாகக் கணக்கிட்டு அந்த மதிப்புகளை 3ஆவது சமன்பாட்டில் பிரதியிடுவோம். அந்த மூன்றாவது சமன்பாடு சமனடைந்தால் கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகள் இசைவுடையன என்றும், சமனடையாதபோது இசைவிலாதன என்றும் முடிவு கட்டுவோம்.

கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகளை மாற்றி எழுதினால்

$$x + y = 1 - z \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$3x + 4y = 2 - 5z \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$2x + 3y = 1 - 4z \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

சமன்பாடு (1), (2) ஆகியவற்றிலிருந்து $x = 2 + z$; $y = -(1 + 2z)$. இவற்றை (3)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$2(2 + z) - 3(1 + 2z) = 1 - 4z$$

அதாவது, $1 + 2z - 6z = 1 - 4z$

∴ கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகள் இசைவுடையன; ஆனால், பல தீர்வுக் கணங்களை உடையன.

z-க்கு நாம் விரும்பியவாறு மதிப்புகளைத் தந்தால், x, y-களுக்கு ஒத்த மதிப்புகள் கிடைக்கும்.

அதாவது, $\left.\begin{aligned} x &= 2 + \lambda \\ y &= -(1 + 2\lambda) \\ z &= \lambda \end{aligned}\right\}$, λ ஏதாவது எண்ணி.

எடுத்துக்காட்டாக, $x = 3, y = -3, z = 1$ ஒரு தீர்வுக் கணம்

$x = 1, y = 1, z = -1$ மற்றொரு தீர்வுக் கணம்.

§9. வேண்டாத கணியங்களை அணிகோவை முறையில் விலக்குதல் (Elimination by Determinant Method)

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33} = 0$$

என்ற மூன்று சமன்பாடுகளிலும் விலக்கப்பட வேண்டிய இரண்டு கணியங்கள் x, y எனக்கொள்வோம். இந்த மூன்று சமன்பாடுகளிலும் வலப்பக்கம் சுழியாக இருப்பதைக் கவனிக்கவும்.

முதல் இரண்டு சமன்பாடுகளிலிருந்து x, y-களின் மதிப்புகளைக் கிராமர் முறையில் கணக்கீடு செய்து அவற்றை 3-ஆவது சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டால் x, y ஆகிய இரண்டும் விலக்கப்படும். இதனால் a_{11}, a_{12}, ... போன்ற குணகங்களின் தொடர்புச் சமன்

பாடு கிடைக்கும். இதை x, y-களின் நீக்கற்பலன் (eliminant) என்பர்.

முதல் இரண்டு சமன்பாடுகளைப் பின்வருமாறு எழுதலாம் :

$$a_{11}x + a_{12}y = -a_{13}$$
$$a_{21}x + a_{22}y = -a_{23}$$

$$\therefore \quad x = \frac{\begin{vmatrix} -a_{13} & a_{12} \\ -a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \; ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13} \\ a_{21} & -a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

இவற்றை 3ஆவது சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டால்,

$$a_{31} \times \frac{\begin{vmatrix} -a_{13} & a_{12} \\ -a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}} + a_{32} \times \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13} \\ a_{21} & -a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} + a_{33} = 0$$

அதாவது, $$a_{31} \begin{vmatrix} -a_{13} & a_{12} \\ -a_{23} & a_{22} \end{vmatrix} + a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13} \\ a_{21} & -a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

அதாவது, $$a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

அதாவது, $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

எனவே, கொடுத்த மூன்று சமன்பாடுகளில் x, y-களின் நீக்கற் பலன்

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

[குறிப்பு (1): மேற்கூறிய முறையை $(n+1)$ ஒருங்கைச் சமன்பாடுகளில் உள்ள n கணியங்களை விலக்குவதற்கும் பயன் படுத்தலாம்.

(2) ஒருங்கைச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகாண, மாறு உறுப்புகள் வலப்பக்கத்திற்கு மாற்றப்படவேண்டும். ஆனால், வேண்டாத கணியங்களை அணிகோவை முறையில் விலக்குவதற்கு, மாறு உறுப்புகள் உட்பட எல்லா உறுப்புகளையும் ஒரே பக்கத்தில் (இடப் பக்கத்தில்) வைத்துக்கொண்டு, மற்ற பக்கத்தில் (வலப் பக்கத்தில்) சுழி இருக்குமாறு மாற்றி அமைக்கவேண்டும்.]

§10. சமபடித்தான ஒருங்கைச் சமன்பாடுகளும் அவற்றின் அற்பமல்லாத தீர்வுக் கணங்களும் (Homogeneous simultaneous equations and their non-trivial solution sets)

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \dots \quad \dots \quad (A)$$

என்ற சமபடிச் சமன்பாடுகளை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ எப்போதும் அந்தச் சமன்பாடுகளின் ஒரு தீர்வுக் கணம் ஆகும். இந்தத் தீர்வுக் கணத்திற்கு **அற்பத் தீர்வுக் கணம்** (trivial solution set) என்று பெயர். மற்ற தீர்வுக் கணங்களுக்கு **அற்பமல்லாத தீர்வுக் கணங்கள்** (non-trivial solution sets) என்று பெயர்.

இனி, மேலே எடுத்துக்கொண்ட சமன்பாடுகளுக்கு அற்பமல்லாத தீர்வுக் கணங்கள் உண்டாவதற்கான நிபந்தனை என்னவென்று ஆராய்வோம்.

அற்பமல்லாத தீர்வுக் கணம் உண்டென்றால் x, y, z-களின் மதிப்புகளில் ஒன்றாவது சுழியில்லாமல் இருக்கவேண்டும்.

$$|D| \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ என்றால்}$$

$$x \cdot |D| = \begin{vmatrix} a_{11}x & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$(C_1 \to C_1 + y \cdot C_2 + z \cdot C_3)$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad [(A) \text{ ஐப் பயன்படுத்தினுல்}]$$

அதாவது, $x \cdot |D| = 0$. இதேபோல் $y \cdot |D| = 0$ $z \cdot |D| = 0$ ஆனுல் x, y, z-களில் ஏதாவது ஒன்றின் மதிப்பாவது சுழி இல்லை. எனவே $|D| = 0$.

அதாவது, $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \qquad \ldots \quad (B)$$

எனவே, கொடுத்துள்ள சமபடித்தான ஒருங்கைச் சமன்பாடுகள் அற்பமல்லாத தீர்வுக்கணம் பெற்றிருக்க வேண்டும் என்ருல், குணக அணிகோவையின் (coefficient determinant) மதிப்பு சுழியாக வேண்டும்.

குணக அணிகோவையின் மதிப்பு சுழி எனில், கீழ்க்காணும் முறையால் அற்பமல்லாத தீர்வுக் கணங்களைக் காணலாம் :

(A)-ல் உள்ள ஏதாவது இரண்டு சமன்பாடுகளிலிருந்து $x : y : z$ காணலாம். இதையே $x = kz$, $y = lz$ (k, l மாறிலிகள்) என எழுதலாம். இவை மீதமுள்ள சமன்பாட்டையும் சமனடையச் செய்யும்.

z-க்கு நம் விருப்பம்போல் ஒரு மதிப்பைக் கொடுத்தால், அதற்குரிய x, y-களின் மதிப்புகள் கிடைக்கும். z-க்கும் வேருெரு மதிப்புத் தந்தால், அதற்கேற்ருற்போல் x, y ஆகியவற்றின் மதிப்புகள் கிடைக்கும். இவ்வாறு எண்ணிலடங்கா (infinite) தீர்வுக் கணங்கள் கிடைக்கப்பெறலாம்.

§ **10-1.** துணை முடிவு.

சமன்பாடுகள் (A)-க்கு அற்பத்தீர்வு $(x = 0, y = 0, z = 0)$ தான் உண்டென்றால் $|D| \neq 0$.

மேற்கூறிய விளக்கங்களை n சமன்பாடுகளுக்கும் விரிவு படுத்தலாம்.

மாதிரிக்கணக்கு **(9)**

கீழ்க்கண்ட 3 சமன்பாடுகளிலிருந்து x, y ஆகிய இரண்டு கணியங்களை விலக்குக.

$$ax + hy + g = 0$$
$$hx + by + f = 0$$
$$gx + fy + c = 0$$

நீக்கற் பலன் : $\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$

அதாவது, $a \begin{vmatrix} b & f \\ f & c \end{vmatrix} - h \begin{vmatrix} h & f \\ g & c \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} h & b \\ g & f \end{vmatrix} = 0$

அதாவது, $a(bc - f^2) - h(ch - fg) + g(hf - bg) = 0$

அதாவது, $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$

மாதிரிக்கணக்கு **(10)**

கீழ்வரும் 3 சமன்பாடுகள் இசைவுடையன என்றால், அணிகோவை முறையைப் பயன்படுத்தி λ-ன் மதிப்புக் காண்க.

$$4x + \lambda y = 10$$
$$x - 2y = 8$$
$$5x + 7y = 6$$

λ-ன் மதிப்புக்கான x, y-களின் மதிப்புகளை அணிகோவை முறையில் காண்க. (B.E. '63)

கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகளை மாற்றி எழுதினால்

$$4x + \lambda y - 10 = 0$$
$$x - 2y - 8 = 0$$
$$5 + 7y - 6 = 0$$

இவற்றிலிருந்து x, y-களை விலக்கினால்,

$$\text{நீக்கற் பலன் : } \begin{vmatrix} 4 & \lambda & -10 \\ 1 & -2 & -8 \\ 5 & 7 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

அதாவது, $4(12 + 56) - \lambda(-6 + 40) - 10(7 + 10) = 0$

அதாவது, $288 - 34\lambda - 170 = 0$

$$\therefore \quad \lambda = 3$$

x, y-களின் மதிப்புகளைக்காண, இறுதி இரண்டு சமன்பாடுகளை எடுத்துக்கொண்டால் போதுமானது.

$$x - 2y = 8$$
$$5x + 7y = 6$$

இங்கே, $|D| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 17.$

$$|D_1| = \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 68 ; \; |D_2| = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -34$$

$$\therefore \quad x = \frac{|D_1|}{|D|} = \frac{68}{17} = 4; \; y = \frac{|D_2|}{|D|} = \frac{-34}{17} = -2$$

$x = 4$, $y = -2$ என முதல் சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டால், அது சமனடைகிறது. எனவே $x = 4$, $y = -2$ என்பவை சரியான தீர்வுகளாகும்.

பயிற்சி - 1.

I. பின்வரும் அணிகோவைகளின் மதிப்புகளைக் காண்க:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} ad + bc & bd - ac \\ ac - bd & ad + bc \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{vmatrix}$ (4) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 3 & 7 \end{vmatrix}$ (6) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$

(7) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ (8) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

(9) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ (10) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$

(11) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 & -2 & -5 \\ 3 & -2 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$

(13) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ (12) $\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 \end{vmatrix}$

[Kerala Engg. '67]

II. கீழ்க்கண்டவற்றை நிறுவுக :

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 \end{vmatrix} = (\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta) \times (\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)$

(3) $\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix} = x^2(x+a+b+c)$

(4) $\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & 2a+b+c & b \\ c & a & a+2b+c \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$ [Kerala Engg. '65]

(6) $\begin{vmatrix} b^2+ac & bc & c^2 \\ ab & ac & bc \\ a^2 & ab & b^2+ac \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

(கொடுத்துள்ள அணிகோவை $= \begin{vmatrix} b & c & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & a & b \end{vmatrix}^2$ என்று நிறுவுக)

(7) $\begin{vmatrix} a & b & ax+by \\ b & c & bx+cx \\ ax+by & bx+cy & 0 \end{vmatrix} = (b^2-ac) \times (ax^2+2bxy+cy^2)$ [B. Tech '71]

(8) $\begin{vmatrix} 1 & \sin A & \sin B \\ \sin A & 1 & \sin C \\ \sin C & \sin C & 1 \end{vmatrix} = 0 \left(A + B + C = \frac{3\pi}{2} \right)$

[B.E. '72]

(9) $\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} = (1+a^2+b^2)^3$

(10) $\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$

(11) $\begin{vmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 1-i & 0 & 2-3i \\ 1-2i & 2+3i & 0 \end{vmatrix} = -6 + 18i$

(12) $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \\ (a-1)^2 & (b-1)^2 & (c-1)^2 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(13) $\begin{vmatrix} b^2c^2 & bc & b+c \\ c^2a^2 & ca & c+a \\ a^2b^2 & ab & a+b \end{vmatrix} = 0$

[B. Tech '72]

(14) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ என்ற அணிகோவையின்

4 ஆவது நிரையில் உள்ள மூலகங்களின் இணைக்காரணிகளைக் காண்க. இவற்றைப் பயன்படுத்தி அந்த அணிகோவையின் மதிப்பு காண்க.

[B. E. '71]

(15) $\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3+1 \\ b & b^2 & b^3+1 \\ c & c^2 & c^3+1 \end{vmatrix} = 0$ என்றால்,

$abc + 1 = 0$ என நிறுவுக ($a \neq b \neq c$). [Kerala Engg. '63]

(16) $\begin{vmatrix} a & a^3 & a^4-1 \\ b & b^3 & b^4-1 \\ c & c^3 & c^4-1 \end{vmatrix} = 0$ என்றால்,

$abc\,(bc + ca + ab) = a + b + c$ என நிறுவுக ($a \neq b \neq c$).

(17) $\begin{vmatrix} x & l & m & 1 \\ \alpha & x & n & 1 \\ \alpha & \beta & x & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & 1 \end{vmatrix} = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$

(18) $\begin{vmatrix} x & y & x & x \\ x & y & y & y \\ y & y & y & x \\ x & x & y & x \end{vmatrix} = -(x - y)^4$

(19) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = (a + b + c + d)(a + b - c - d)$
$\times (a + c - b - d)(a + d - b - c)$

(20) $\begin{vmatrix} x & y & y & y \\ y & x & y & y \\ y & y & x & y \\ y & y & y & x \end{vmatrix} = (x + 3y)(x - y)^3$

[B. Tech '72]

(21) $\begin{vmatrix} 0 & -c & b & x \\ c & 0 & -a & y \\ -b & a & 0 & z \\ x' & y & z' & w \end{vmatrix} = -(ax + by + cz) \times (ax' + by' + cz')$

[B. Tech '71 & '73]

(22) $\begin{vmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a & 1 \\ a^2 & a^2 + 2a & 2a + 1 & 1 \\ a & 2a + 1 & a + 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (a - 1)^6$

[B. Tech '72]

(23) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d & d^3 \end{vmatrix} = (a - b)(a - c)(a - d) \times (b - c)(b - d)(a - d)$

(24) $\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = (a-b)^{n-1} [a + \overline{n - 1}\, b]$

(25) $\begin{vmatrix} a + b & a & a & \cdots & a \\ a & a + b & a & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & \cdots & a & \cdots & a + b \end{vmatrix} = b^{n-1} (na + b)$

(26) $$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$= a_1 a_2 \dots a_n \times \left(1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}\right)$$

III. (1) $f(x) = (a_1 - x)(a_2 - x)(a_3 - x)(a_4 - x)$ என்றால்

$$\begin{vmatrix} a_1 & x & x & x \\ x & a_2 & x & x \\ x & x & a_3 & x \\ x & x & x & a_4 \end{vmatrix} = f(x) - xf'(x)$$ என நிறுவுக.

[B. E. '69 & '72]

(2) $$\begin{vmatrix} 2aa' & ab'+a'b & ac'+a'c \\ ab'+a'b & 2bb' & bc'+b'c \\ ac'+a'c & bc'+b'c & 2cc' \end{vmatrix}$$

என்ற அணிகோவை இரண்டு அணிகோவைகளின் பெருக்கம் (product) என்று நிறுவிய பின்னர் இதன் மதிப்பு சுழியென்று காண்பிக்கவும்.

(3) $$|\Delta| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ என்ற அணிகோவையில்

A_{rs} என்பது a_{rs}-ன் இணைகாரணி என்றால்,

(a) $$|\Delta|^2 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

(b) $2|\Delta|^2 = \begin{vmatrix} A_{12}+A_{13} & A_{13}+A_{11} & A_{11}+A_{12} \\ A_{22}+A_{23} & A_{23}+A_{21} & A_{21}+A_{22} \\ A_{32}+A_{33} & A_{33}+A_{31} & A_{31}+A_{32} \end{vmatrix}$

என நிறுவுக.

(4) x, y, z என்பவை மெய்யெண்கள் என்ருல்

$$\begin{vmatrix} 9x & 15 & 12y \\ -6y & -10 & 8z \\ 21z & 35 & -28z \end{vmatrix}$$

என்ற அணிகோவைக்கு மிகச் சிறிய மதிப்பு உண்டாவதற்கான நிபந்தனை $x = y = z$ என்று நிறுவுக. [Calicut Engg. '70]

(5) $\begin{vmatrix} x+1 & x+2 & x+a \\ x+2 & x+3 & x+b \\ x+3 & x+4 & x+c \end{vmatrix}$

என்ற அணிகோவை x-ன் தொடர்பில்லாதவை (independen of x) என நிறுவுக. மேலும் a, b, c கூட்டுவிருத்தித் தொடரில் அமைந்தால் அந்த அணியின் மதிப்பு சுழி என்றும் நிறுவுக.

(6) பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5+x \\ 7 & 8+x & 9 \\ 5+2x & 2+x & -1+x \end{vmatrix} = 0$

(b) $\begin{vmatrix} a+x & a-x & a-x \\ a-x & a+x & a-x \\ a-x & a-x & a+x \end{vmatrix} = 0$ (c) $\begin{vmatrix} x & a & b \\ x^2 & a^2 & b^2 \\ x^3 & a^3 & b^3 \end{vmatrix} = 0$

(7) ஓர் ஒற்றைத் தர (odd order) அணிகோவை $|\Delta| = |a_{ij}|$-ல் i, j-களின் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $a_{ij} + a_{ji} = 0$ என்ருல், $|\Delta| = 0$ என்று நிறுவுக. [B. Tech '71]

(8) ஓர் அணிகோவையில் ஒவ்வொரு நிரையிலும் நிரலிலும் ஒரேயொரு சுழியல்லாத மூலகம் உண்டு. அந்த சுழியல்லாத மூலகங்கள் எல்லாமே 1 என்றால் அணிகோவையின் மதிப்பு ± 1 என்று நிறுவுக.

(9) 3 ஆம் தர எதிர்ச்சீர் (skew symmetric) அணி கோவையின் மதிப்பு சுழி என்றும், 4 ஆம் தர எதிர்ச்சீர் அணி கோவையின் மதிப்பு அதன் மூலகங்களால் ஆன ஒரு கோவை (expression)யின் நிறை வர்க்கம் (perfect square) என்றும் நிறுவுக.
[B. E., '70]

(10) $S_r = a^r + b^r + c^r$ என்றால்,

$$\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix} = (b-c)^2 (c-a)^2 (a-b)^2$$

என்று நிறுவுக.

[இதற்கு $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ என்ற அணிகோவையின் வர்க்கத்தைப் பயன் படுத்துக.]

(11) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ $|B| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

என்றால் $|M| = 3|A|^2 + |A| \cdot |B| + |B|^2$ என்பதன் மதிப்பு காண்க.

(12) $$\begin{vmatrix} a^2+\lambda^2 & ab+c\lambda & ca-b\lambda \\ ab-c\lambda & b^2+\lambda^2 & bc+a\lambda \\ ca+b\lambda & bc-a\lambda & c^2+\lambda^2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \lambda & c & -b \\ -c & \lambda & a \\ b & -a & \lambda \end{vmatrix}$$

$= \lambda^3 (a^2 + b^2 + c^2 + \lambda^2)^3$ என்று நிறுவுக.

IV. அணிகோவை (கிராமர்) முறையைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் ஒருங்கைச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க :

(1) $3x - y + z = 8$
$2x + 3y - 2z = -5$
$7x - 2y - 5z = 0$

(2) $5x + 3y + 3z = 48$
$2x + 6y - 3z = 18$
$8x - 3y + 2z = 21$
[B. E. '62]

(3) $x + y + z = 2$
$x + 2y + 3z = 1$
$3x + y - 5z = 4$
[B. E. '61]

(4) $-5x + 2y + 2z = 7$
$2x - 4y + z = 3$
$4x + 6y - 3z = -5$
[B. E. '72]

(5) $4x - 3y + 2z + 7 = 0$
$6x + 2y - 3z - 33 = 0$
$2x - 4y - z + 3 = 0$

(6) $2x + y + 4z = 2$
$x + 3y = 2z + 7$
$5z - 8 = 5x + 3y$
[Part time B. E. '72]

(7) $x - y + z = 0$
$2x + 3y - 5z = 0$
$3x - 4y - 2z = -1$
[B. Tech '71]

(8) $2x - y - z = 1$
$3x + 2y + 4z = 3$
$x - 5y - 3z = -6$
[B. E. '69]

(9) $2x - y - z = 1$
$3x + 2y + 4z = 3$
$x - 5y - 3z = -6$
[Part time B. E. '73]

(10) $2x - 5y + 2z = 7$
$x + 2y - 4z = 3$
$3x - 4y - 6z = 5$
[B. E. '70 & '73]

(11) $x - 2y + z = 3$
$x + 3z = 11$
$-2y + z = 1$
(B. E. '73)

(12) $x - y + z = 0$
$y + z - w = 3$
$x - z - w = 4$
$x + y + w = 1$
[Kerala Engg. '67]

(13) $3yz + 5zx + 2xy = 10\,xyz$
$2yz - xz + xy = 2\,xyz$
$yz + 3zx + 5xy = 9\,xyz$

(14) $\frac{x^2 z^3}{y} = e^8 ; \ \frac{y^2 z}{x} = e^4 ; \ \frac{x^3 y}{z^4} = 1$ [B. E. '69]

(மேற்கண்ட சமன்பாடுகளின் மடக்கைகளைக் கண்டபின் தீர்வு காண்க.)

V (1) பின்வரும் ஒருங்கைச் சமன்பாடுகள் இசைவுடையனவா என்று ஆராய்க.

(a) $\begin{aligned} x + 3y - 2z &= 2 \\ 3x - y - z &= 1 \\ 2x + 6y - 3z &= 3 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= -5 \\ 7x_1 - 2x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned}$

(2) $\begin{aligned} 2\lambda x - 3y + \lambda - 3 &= 0 \\ 3x - 2y + 1 &= 0 \\ 4x - \lambda y + 2 &= 0 \end{aligned}$

என்ற சமன்பாடுகள் இசைவுடையன என்றால் λ-வின் மதிப்புகள் யாவை? அந்த λ-வின் மதிப்புகளுக்கு, x, y-களின் தீர்வு காண்க. [B. E. '62]

(3) $\begin{aligned} x + y + 2z &= a \\ x + 3y - 2z &= b \\ 5x + 7y + 6z &= c \end{aligned}$

என்பவை இசைவுடைய சமன்பாடுகள் என்றால் $c = 4a + b$ என நிறுவுக. இதைப் பயன்படுத்தி x, y-களின் மதிப்புகளை z, a, b ஆகியவற்றால் எழுதுக. [B. E. '72]

(4) $\begin{aligned} 2x + 3y + 1 &= 0 \\ ax + y - 2 &= 0 \\ x - 2y - 3 &= 0 \end{aligned}$

என்பவை இசைவுடைய சமன்பாடுகள் என்றால் a-ன் மதிப்பு யாது? [Sri Venkateswara '66]

(5) $\begin{aligned} (3 + \lambda)\,x + (2 + 2\lambda)\,y + \lambda - 2 &= 0 \\ (2\lambda - 3)\,x + (2 - \lambda)\,y + 3 &= 0 \\ 3x + 7y - 1 &= 0 \end{aligned}$

என்பவை இசைவுடைய சமன்பாடுகள் என்றால், λ-வின் மதிப்புகளைக்கண்டு, அவற்றிலிருந்து x, y-களின் தீர்வு காண்க. [B. E. '68]

VI. (1) கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளுக்கு அற்பமல்லாத தீர்வுகள் உண்டா என ஆராய்ந்து, உண்டென்றால் அவற்றைக் காண்க :

(a) $3x - 2y + 4z = 0$
$2x + y - 3z = 0$
$x + 3y - 2z = 0$

(b) $2x - 3y + 4z = 0$
$x + y - 2z = 0$
$3x + 2y - 3z = 0.$

(c) $x + 3y + z = 0$
$9x + 7y + 3z = 0$
$55x + 5y + 7z = 0$

(d) $3x - 2y + 4z = 0$
$x + 3y - 2z = 0$
$2x + y - 3z = 0$

(2) $ax + by + cz = 0$
$bx + cy + az = 0$
$cx + ay + bz = 0$ என்ற சமன்பாடுகளுக்கு அற்பமல்லாத தீர்வு உண்டென்றால்,

$a^3 + b^3 + c^3 - 3\,abc = 0$ என நிறுவுக.

[B. Tech '71, & '73]

(3) $x + 2y + \lambda z = 0$
$2x + \lambda y + 2z = 0$
$3x + y + z = 0$ என்ற சமன்பாடுகளுக்கு அற்பமல்லாத தீர்வுகள் உண்டென்றால் λ-வின் மதிப்புகளைக் காண்க.

VII. (1) $x = \dfrac{a}{b-c}$, $y = \dfrac{b}{c-a}$, $z = \dfrac{c}{a-b}$ என்ற சமன்பாடுகளிலிருந்து a, b, c-களை விளக்குக.

(2) $bx = ay - z$; $cy = bz - x$; $az = cx - y$ என்ற சமன்பாடுகளிலிருந்து x, y, z-களை விலக்குக.

VIII. (1) $2z + 3 = y + 3x$
$x - 3z = 2y + 1$
$3y + z = 2 - 2x$

என்ற சமன்பாடுகள், அணிக்கோவையைப் பயன்படுத்தி இசைவுடையனவா என்று ஆராய்க. இசைவுடையன என்றால் தீர்வு காண்க.

[B. E. '70]

(2) $\lambda x + 2y + z = 1$
$x + 2\lambda y + z = \mu$
$x + 2y + \lambda z = 1$

என்ற சமன்பாடுகளுக்கு (a) தீர்வு இல்லை (b) ஒரேயொரு தீர்வு கணம் உண்டு (c) எண்ணிலடங்காத் தீர்வுக் கணங்கள் உண்டு ஆகிய மூன்று வகைகளுக்கு λ, μ-களின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(3) $7x + 6y + 5z = a$
$x + 2y + z = b$
$3x - 2y + z = c$

என்ற சமன்பாடுகள் இசைவுடையன வென்றால் $a = b = c = 0$ என்று நிறுவுக. [B. E. '71]

விடைகள்

I. (1) 0 (2) $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ (3) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$
(4) $3\,abc - a^3 - b^3 - c^3$ (5) 120 (6) -73
(7) 10 (8) 0 (9) 160 (10) 4 (11) 118
(12) -8 (13) 720

III. 6(a) $x = 0, -5, -\frac{13}{2}$ (b) $x = 3a, 0, 0$

(c) $x = 0, a, b$ (11) 5

IV. (1) $x = \frac{3}{2}, y = -1, z = \frac{5}{2}$
(2) $x = 3, y = 5, z = 6$
(3) $x = 4, y = -3, z = 1$
(4) $x = 1, y = 1, z = 5$
(5) $x = \frac{5}{2}, y = 3, z = -4$
(6) $x = -3, y = 4, z = 1$
(7) $x = \frac{1}{16}, y = \frac{7}{32}, z = \frac{5}{32}$
(8) $x = 1, y = 2, z = -1$
(9) $x = 1, y = 2, z = -1$
(10) $x = 5, y = 1, z = 1$
(11) $x = 2, y = 1, z = 3$
(12) $x = \frac{5}{3}, y = \frac{4}{3}, z = -\frac{1}{3}, w = -2$
(13) $x = 1, y = 1, z = 1$
(14) $x = y = z = e^2$

V. (1) (a) இசைவுடையன (c) இசைவுடையன

(2) $\lambda = 3, 6$; $\lambda = 3$ என்றால் $x = 1,\ y = 2$;
$\lambda = 6$ என்றால் $x = -\frac{1}{5},\ y = \frac{1}{5}$

(3) $x = \frac{3a}{2} - \frac{b}{2} - 4z;\ y = \frac{b}{2} - \frac{a}{2} + 2z$

(4) $a = 3$ (5) $\lambda = 3;\ -\frac{1}{32}$

VI. (1) (a) $x = 0,\ y = \lambda,\ z = \lambda$
(λ ஏதாவது ஓர் எண்ணி)

(b) அற்பத்தீர்வு மட்டும் உண்டு.

(c) $x = -\frac{\lambda}{10},\ y = \frac{-3\lambda}{10},\ z = \lambda$
(λ ஏதாவது ஓர் எண்ணி)

(d) அற்பத்தீர்வு மாத்திரம் உண்டு.

(3) $\lambda = -1, 2$

VII. (1) $xy + zx + yz + 1 = 0$

(2) $a^2 + b^2 + c^2 + 1 = 0$

VIII. (1) இசைவுடையன $x = 1 + \lambda$,
$y = -\lambda,\ z = \lambda$ (λ ஏதாவது ஓர் எண்ணி)

(2) (a) $\lambda = 1,\ \mu \neq 1$ அல்லது $\lambda = -2\ \mu \neq -2$

(b) $\lambda \neq 1,\ \mu = -2$

(c) $\lambda = 1,\ \mu = 1$ அல்லது $\lambda = -2,\ \mu = -2$

(அணி முறையைப் பயன்படுத்தி இக் கணக்கை எளிதில் செய்யலாம்.)

2. அணிகளின் அறிமுகமும் அவற்றின் இயற்கணிதமும்

(INTRODUCTION TO MATRICES AND ALGEBRA OF MATRICES)

§ 11. தொடக்க காலத்தில் அணிகோவைகளின் தொடர்பாக ஆராயப் பெற்ற "அணிகள்" (Matrices) என்பவை காலப் போக்கில் தனிச் சிறப்பெய்திப் பல துறைகளில் இன்றியமையாத அடிப்படைச் செயற் கருவிகளாகத் (fundamental operational tools) திகழ்கின்றன.

ஒருபடி நிலைமாற்றக் கோட்பாடு (Linear transformation theory) விளக்கப்படுவதற்கு 1857-ல் ஆர்தர் கேய்லி (Arthur Cayley) என்னும் ஆங்கிலக் கணித மேதையால் பயன்படுத்தப் பட்ட அணிகோட்பாடு (Matrix theory) பல துறைகளில் புகுந்து கணக்கு நூலின் ஏற்றமிகுந்த அணிகலனாக இலங்கிவருகிறது. குவான்டம் இயக்கவியல் (Quantum Mechanics), அணுவியல் (Atomic Physics), புள்ளியியல் (Statistics), உளநூல் (Psychology) முதலிய துறைகளில் அணி முறை (Matrix method) மிகவும் பயன்படுகிறது.

§ 12. அணி - வரைவிலக்கணம்

m நிரைகளிலும் (rows), n நிரல்களிலும் (columns) ஒரு முறைப்படி அமைக்கப்பெற்ற (arranged) mn கணியங்களின் தொகுதி (array)-க்கு (m, n) தரமுள்ள அணி [Matrix of (m, n) order] என்று பெயர். இதைச் சுருக்கமாக (m, n) அணி என்று எழுதுவது வழக்கம். சிலர் $(m \times n)$ அணி என்றும் எழுதுவர்.

அணியில் உள்ள mn கணியங்களுக்கு மூலகங்கள் (elements) என்று பெயர்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$ என்பது ஓர் (2, 4) அணி.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{18} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{28} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{51} & a_{52} & \cdots & a_{58} \end{bmatrix}$$ என்பது ஓர் (5, 8) அணி.

§ 13. குறியீடு (Notation)

ஓர் அணியைக் குறிக்க [ ], ‖ ‖, ( ) ஆகிய மூன்று வகைக் குறியீடுகளைப் பொதுவாகப் பயன்படுத்துகின்றனர். நாம் [ ] என்ற குறியீட்டைப் பயன்படுத்துவோம்.

அணிகளை $A, B, C, \ldots$ போன்ற ஆங்கிலப் பெரிய எழுத்துகளால் மிகச் சுருக்கமாகக் குறிப்பது வழக்கம். மேலும்,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ என்பதை,

$[a_{ij}]_{\substack{i=1,m \\ j=1,n}}$ என்றும் அல்லது இன்னும் சுருக்கமாக $[a_{ij}]$ என்றும் எழுதுவது மரபு.

a_{ij} என்பது i ஆவது நிரையிலும், j ஆவது நிரலிலும் உள்ள மூலகம் என்று எளிதாக விளங்கும்.

§ 14. அணி வகைகள் — வரைவிலக்கணங்கள்

§ 14-1. ஒரே ஒரு நிரை கொண்ட அணிக்கு நிரை அணி (Row matrix) அல்லது நிரை வெக்டர் (Row vector) என்று பெயர்.

எடுத்துக்காட்டு :

[5 4 3 2] என்பது ஒரு நிரைவெக்டர்.

§ 14-2. ஒரே ஒரு நிரல் கொண்ட அணிக்கு நிரல் அணி (Column matrix) அல்லது நிரல் வெக்டர் (Column vector) என்று பெயர்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$ என்பது ஒரு நிரல் வெக்டர்.

§ 14-3. n நிரைகளும், n நிரல்களும் கொண்ட அணியை n-தரமுள்ள [அல்லது (n, n) தரமுள்ள] சதுர அணி (Square matrix of nth order) என்பர்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$ என்பது ஒரு (3, 3) சதுர அணியாகும்.

§ 14-4. திருப்பு அணி (Transpose of a Matrix)

ஒரு (m, n) அணி A-ல் நிரைகளை நிரல்களாகவும், நிரல்களை நிரைகளாகவும் மாற்றி யமைத்த பிறகு கிடைக்கும் (n, m) அணிக்கு நிரைநிரல் மாற்று அணி அல்லது திருப்பு அணி

(Transpose Matrix) என்று பெயர். திருப்பு அணியை A^1, A^T, A ஆகிய மூன்றுவகைக் குறியீடுகளால் குறிப்பது வழக்கம். நாம் A^T என்ற குறியீட்டைப் பயன்படுத்துவோம்.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ என்றால்,}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$A = [1 \quad 5 \quad -7 \quad 9]$ என்றால், $A^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -7 \\ 9 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 5 \\ -9 \\ 0 \\ 11/2 \end{bmatrix}$ என்றால், $B^T = [5 \quad -9 \quad 0 \quad 11/2]$

மேலும், $[a_1, b_1, c_1]^T \equiv \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}$ என்றும் அறிக.

§ **14–5.** அணியின் அணிகோவை (Determinant of a Matrix)

ஒரு சதுர அணி A-ன் மூலகங்களால் ஆன அணி கோவைக்கு அணியின் அணிகோவை என்று பெயர். இது $|A|$ என்ற குறியீட்டால் குறிக்கப்படும்.

§ **14–5·1.** பூச்சியக் கோவை அணி (Singular Matrix)

ஒரு சதுர அணியின் அணிகோவை மதிப்பு சுழியானால், அந்த அணி பூச்சியக் கோவை அணி என்றும், அணிகோவையின் மதிப்பு சுழி இல்லை என்றால், அந்த அணி பூச்சியமில் கோவை அணி (Non-singular matrix) என்றும் வழங்கப்படும்.

§ **14–6.** முக்கோண அணி (Triangular Matrix)

ஒரு சதுர அணியில் தலையாய மூலைவிட்டத்திற்குக் (leading diagonal) கீழே உள்ள ஒவ்வொரு மூலகமும் சுழியென்றால், அந்த அணிக்கு மேல் முக்கோண அணி (Upper triangular matrix) என்று பெயர். அவ்வாறே, ஒரு சதுர அணியின் தலையாய மூலை விட்டத்திற்கு மேலே உள்ள ஒவ்வொரு மூலகமும் சுழி என்றால், அந்த அணிக்குக் கீழ் முக்கோண அணி (Lower triangular matrix) என்று பெயர்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

என்பவை மேல் முக்கோண அணிகள்.

ஆனால்,
$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 0 \\ 3 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

என்பவை கீழ்முக்கோண அணிகள்.

§ 14-7. சம மூலைவரை அணி (Diagonal Matrix).

ஒரு சதுர அணியின் தலையாய மூலைவிட்ட மூலகங்கள் நீங்கலாக மற்ற மூலகங்கள் அனைத்தும் சுழியானால், அந்த அணி சம மூலைவரை அணி என்று வழங்கப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$$

ஆகியவை சம மூலை வரை அணிகள்.

[குறிப்பு (1) : ஒரு (m, n) சம மூலைவரை அணியின் தலையாய மூலைவிட்ட மூலகங்கள் $d_1, d_2, \ldots d_n$ என்றால், அதை diag $(d_1, d_2, \ldots d_n)$ என்றும் குறிப்பிடுவதுண்டு.

(2) ஒரு சம மூலைவரை அணியின் மூலைவிட்ட மூலகங்கள் சமமாயின் அவ்வணி மூலைவரை அணி (Scalar matrix) எனப்படும்

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & x_{23} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$ எனில்,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$ என்பதை, $[A \; 0]$ என்றும்

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ என்பதை, $\begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}$ என்றும்

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ என்பதை, $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ என்றும்

எழுதுவது மரபு.

§ 14-8. அலகு அணி அல்லது அணி அலகு (Unit Matrix)

ஒரு (n, n) சம மூலைவரை அணியில் தலையாய மூலைவிட்ட மூலகங்கள் ஒவ்வொன்றும் 1 ஆகவும், மற்ற எல்லா மூலகங்களும் சுழியுமானால், அந்தச் சதுர சம மூலைவரை அணிக்கு n-தரமுள்ள

அலகு அணி அல்லது அணி அலகு என்று பெயர். இதை I_n என்று எழுதுவது வழக்கம். ஐயம் எழாதபோது I என்றே குறிக்கப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

§ 14-9. முற்றும் பூச்சிய அணி (Null Matrix)

ஓர் அணியில் எல்லா மூலகங்களும் சுழியானல் அந்த அணிக்கு முற்றும் பூச்சிய அணி (Null matrix or Zero matrix) என்று பெயர்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ஆகியவை முறையே (2, 3), (4, 3), (3, 3) தரமுள்ள (முற்றும்) பூச்சிய அணிகள். இவற்றை முறையே $[O]_{(2,3)}$, $[O]_{(4,3)}$, $[O]_{(3,3)}$ என்று குறிப்பிடலாம். ஐயம் எழாதபோது $[O]$ என்றே அல்லது இன்னும் சுருக்கமாக O என்றே குறிக்கலாம்.

§ 15. குறிப்பு

ஓர் அணியின் மூலகங்கள் மெய் எண்களாகவே இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை. கலப்பு எண்களாகவும் (complex numbers) இருக்கலாம் என்பதை நினைவில் கொள்ள வேண்டும். சில தேற்றங்கள் மெய் எண்களுக்கு மட்டும் பொருந்தும், சில தேற்றங்கள் கலப்பு எண்களுக்கு மட்டும் பொருந்தும். அவை அந்தந்த இடங்களில் தெளிவாக விளக்கப்படும். ஆனல், பொது

வாகக் கூறப்படும் தேற்றங்கள் மெய் எண்களுக்கும், கலப்பு எண் களுக்கும் பொருந்தும்.

§ 16. அணியும் அணிகோவையும்

அணி, அணிகோவை ஆகியவற்றின் சிறப்புப் பண்புகளை ஐயந்திரிபற அறிந்து கொள்வது மிக்க இன்றியமையாதது.

அணி என்பது ஓர் ஒழுங்குமுறையோடு அடுக்கிவைக்கப்பட்ட சில எண்களின் தொகுதி என்று வரைவிலக்கணம் செய்தோம். எனவே, ஓர் அணியில் வரும் மூலகங்களின் வரிசை இடத்தை (ordered position) நம் விருப்பம்போல் மாற்றியமைக்க முடியாது. எடுத்துக்காட்டாக (x_1, y_1, z_1) என்ற அணியின் மூலகங்கள் முப்பரிமாண வெளியில் உள்ள ஒரு புள்ளியின் ஆயத்தொலைகளைக் (co-ordinates) குறித்தால், $[x_1, z_1, y_1)$ என்ற அணி முற்றிலும் வேறுபட்ட ஒரு புள்ளியைக் குறிக்கும். ஆகையால் ஒரு அணியின் நிரைகளையும் நிரல்களையும் மாற்றியமைத்தாலோ, அல்லது இரண்டு நிரல்களை அல்லது இரண்டு நிரைகளை மாற்றி யமைத்தாலோ முற்றிலும் வேறுபட்ட அணி கிடைக்கும் என்பதை நாம் உணரவேண்டும். மேலும், கொடுத்துள்ள ஓர் அணியை அதைவிடக் குறைந்த தரமுள்ள மற்றோர் அணியாகச் சுருக்க முடியாது.

ஆனால், அணிகோவை அப்படியல்ல. அணிகோவை என்பது அதன் மூலகங்களின் சார்பாக (function of the elements) உள்ள ஒரு கோவையைக் (அல்லது அந்த கோவையின் மதிப்பை) குறிக்கும், ஆகவே ஓர் அணிகோவையை அதைவிடக் குறைந்த தரமுள்ள அணிகோவையாகச் சுருக்க முடியும். அணிகோவை ஓர் எண்ணி (scalar)யைக் குறிக்கும். இதற்கு மாறாக அணி எந்த எண்ணியையும் குறிக்காது ; அது வெக்டர் போன்ற ஒரு கணியமாகும்.

A, B என்ற இரு அணிகளும் சமம் என்று சொல்லும்போது அவைகள் முற்றொருமை என்றாகின்றன. அதாவது, A என்பது (m, n) அணி என்றால், B-ம் (m, n) அணியாகும். மேலும், A-ல் உள்ள மூலகங்களும் B-ல் உள்ள ஒத்த மூலகங்கள் (corresponding elements) சமம் என்று பெறப்படுகிறது. மாறாக, இரண்டு வேறுபட்ட தரமுள்ள அணிகோவைகள் ஒரே எண்ணி யைக் குறிக்கலாம்.

§ 17. அணிகளின் இயற்கணிதம் (Algebra of Matrices)

எண் கணியங்களின் (scalar quantities) தொடர்புகளை +, −, ×, ÷ என்னும் நான்கு செயலிகளால் (operators) பெறுகிறோம். இதேபோல் அணிகளைப் பொறுத்தமட்டில் எவ்வித செயலிகளைப் பயன்படுத்த முடியும் என்பதைக் காண்போம்.

§ 17-1. இரண்டு அணிகளின் கூட்டல்

A, B என்ற சம தரமுள்ள அணிகளைக் கூட்டினால் C என்ற அதே தரமுள்ள அணி கிடைக்கும். C-ன் மூலகங்கள் A, B-களில் உள்ள ஒத்த மூலகங்களின் கூட்டுத் தொகையாகும்.

அதாவது. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$

என்றால், $A + B = C = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix}$

§ 17-2. இரண்டு அணிகளின் கழித்தல்

A, B என்பவை சமதரமுள்ள இரண்டு அணிகளானால், $A—B$ என்பது C என்ற அதே தரமுள்ள அணியைக் குறிக்கும்.

$A = [\ a_{ij}\ ]$, $B = [\ b_{ij}\ ]$, $C = [c_{ij}\ ]$, $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ என்றால், $A - B = C$.

[குறிப்பு : சமதரமல்லாத இரு அணிகளைக் கூட்டவோ, கழிக்கவோ இயலாது.]

§ 17-3. ஓர் அணியை ஓர் எண்ணியால் பெருக்கல் (Product of a Matrix by a Scalar).

A என்ற அணியை k என்ற மெய் அல்லது கலப்பு எண் கணியத்தினால் பெருக்கினால் kA என்ற அணி கிடைக்கும். kA-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகமும் A-ல் உள்ள ஒவ்வொரு ஒத்த மூலகத்தையும் kஆல் பெருக்கியதற்குச் சமமாகும்.

$$\text{அதாவது,}\quad A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$\text{என்றால்,}\quad kA = [ka_{ij}] = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \end{bmatrix}$$

§ **17-4.** மாற்று, சேர்ப்பு, பரவு விதிகள் (Associative, Commutative and Distributative Laws)

(i) A, B என்பவை சம தரமுள்ள அணிகள் என்றால், $A + B = B + A$: (மாற்று விதி).

(ii) A, B, C என்பவை சமதரமுள்ள அணிகள் என்றால், $(A + B) + C = A + (B + C)$ (சேர்ப்பு விதி).

(iii) A, B என்பவை சம தரமுள்ள அணிகள் என்போம். k என்பது ஏதாவது ஓர் எண்ணி என்றால், $k(A + B) = kA + kB$ (பரவு விதி).

[குறிப்பு : $A + A + A$ என்பதை $3A$ என்றும், $9A - 6A$ என்றும் எழுதலாம்.]

மாதிரிக்கணக்கு (1)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

என்றால் $A - B$, $A + B$, $5A + 3B$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

$$A - B = \begin{bmatrix} 2-1 & 0-0 & 1-1 \\ 1-3 & 2-2 & 3-0 \\ -1-2 & 3-1 & 5-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix} 2+1 & 0+0 & 1+1 \\ 1+3 & 2+2 & 3+0 \\ -1+2 & 3+1 & 5+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$5A+3B=\begin{bmatrix} 5\times 2 & 5\times 0 & 5\times 1 \\ 5\times 1 & 5\times 2 & 5\times 3 \\ 5\times(-1) & 5\times 3 & 5\times 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3\times 1 & 3\times 0 & 3\times 1 \\ 3\times 3 & 3\times 2 & 3\times 0 \\ 3\times 2 & 3\times 1 & 3\times 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 0 & 5 \\ 5 & 10 & 15 \\ -5 & 15 & 25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 9 & 6 & 0 \\ 6 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & 0 & 8 \\ 14 & 16 & 15 \\ 1 & 18 & 28 \end{bmatrix}$$

§ 18. இரண்டு அணிகளின் பெருக்கல்

எல்லா அணிகளையும் k என்ற எண்ணியால் பெருக்கலாம். ஆனால், ஏதாவது இரண்டு அணிகளைப் பெருக்க இயலாது போகலாம். மேலும், பெருக்கு வரிசையை (order of the multiplication) யும் கவனிக்க வேண்டியிருக்கும்.

A, B என்ற இரு அணிகளை AB என்ற வரிசையில் பெருக்க வேண்டுமானல் A-ன் நிரல்களின் எண்ணிக்கை B-ன் நிரை களின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாகவேண்டும். இம் மாதிரியான அணிகளுக்கு (வரிசைப் பெருக்கலுக்கு) இணக்கமுள்ள (conformable) அணிகள் என்று பெயர்.

அதேபோல், BA என்ற வரிசையில் பெருக்கவேண்டுமானல், B-ன் நிரல்களின் எண்ணிக்கை A-ன் நிரைகளின் எண்ணிக் கைக்குச் சமமாக வேண்டும்.

வரைவிலக்கணம்

A என்பது ஓர் (m, n) அணி; மற்றும் B என்பது ஓர் (n, p) அணி என்க. A-ன் நிரல்களின் எண்ணிக்கை $= n =$ B-ன் நிரைகளென்பதால், AB என்ற வரிசையில் A, B-களைப் பெருக்கினல் C என்ற (m, p) அணி கிடைக்கும்.

$A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, $C = [c_{ij}]$ என்றல்,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \ldots + a_{in}\, b_{nj}$$

எடுத்துக்காட்டாக,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

என்றல், A என்பது $(3, 2)$ அணி, B என்பது 2×3 அணி.

$C = AB$ என்பது பின்வரும் $(3, 3)$ அணி ஆகும்.

அதாவது,

$$C = \begin{bmatrix} a_{11}\, b_{11} + a_{12}\, b_{21} & a_{11}\, b_{12} + a_{12}\, b_{22} & a_{11}\, b_{13} + a_{12}\, b_{23} \\ a_{21}\, b_{11} + a_{22}\, b_{21} & a_{21}\, b_{12} + a_{22} b_{22} & a_{21}\, b_{13} + a_{22}\, b_{23} \\ a_{31}\, b_{11} + a_{32}\, b_{21} & a_{31}\, b_{12} + a_{32}\, b_{22} & a_{31}\, b_{13} + a_{32}\, b_{23} \end{bmatrix}$$

§ **19.** குறிப்புகள்

§ **19-1.** AB-ல் A ஐ முன்காரணி (prefactor) என்றும், B ஐப் பின்காரணி (postfactor) என்றும் கூறுவர்.

§ **19-2.** மேற் கூறிய பெருக்கல் விதிமுறையைக் கூர்ந்து நோக்கினல், AB வரிசையில் பெருக்கலுக்கான இலக்கணம் இருந்தால், BA வரிசையிலும் பெருக்கலுக்கான இலக்கணம் உண்டு என்று தீர்மானிக்க முடியாது. ஆனல் A, B என்பவை சமதரமுள்ள சதுர அணிகளானல், AB-ம் BA-ம் காணமுடியும் என்ற போதிலும் $AB = BA$ என்று சொல்வதற்கில்லை. சில குறிப்பிட்ட சமதரமுள்ள சதுர அணிகளுக்கு மட்டும் $AB = BA$ ஆகலாம்.

§ **19-3.** A, B, C என்ற அணிகள் AB, BC என்ற வரிசையில் இணக்கமுள்ளவை என்ருல், $A(BC) = (AB)C$ (சேர்ப்பு விதி).

A, B, C என்பவை முறையே (m, n), (n, p), (p, q) அணிகள் என்ருல், ABC என்பது (m, q) அணி ஆகும்.

§ **19-4.** $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ என்பவை இரண்டு (n, n) சதுர அணிகள் எனில், $C = AB = [c_{ij}]$.

$$\text{இங்கே, } c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}.$$

இதையும் அணிகோவைகளின் பெருக்கல் முறையையும் (§ 7) ஒப்பிட்டு நோக்கினல், அவற்றிடையே பெருக்கு முறையில் மட்டும் ஒற்றுமை உண்டென்பது தெளிவாகும்.

மாதிரிக்கணக்கு (2)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 & 7 \\ -6 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

என்ருல், ABஐக் காண்க.

இங்கே, A என்பது (3, 2) அணி, B என்பது (2, 4) அணி
$\therefore$ $C = AB$ என்பது (3, 4) அணி ஆகும்.

$$C = \begin{bmatrix} 2\cdot5+3\cdot(-6) & 2\cdot(-2)+3\cdot1 \\ 1\cdot5+(-1)\cdot(-6) & 1\cdot(-2)+(-1)\cdot1 \\ 0\cdot5+4\cdot(-6) & 0\cdot(-2)+4\cdot1 \end{bmatrix.}$$

$$\begin{matrix} 2\cdot4+3\cdot(-3) & 2\cdot7+3\cdot0 \\ 1\cdot4+(-1)\cdot(-3) & 1\cdot7+(-1)\cdot0 \\ 0\cdot4+4\cdot(-3) & 0\cdot7+4\cdot0 \end{matrix}\Bigg]$$

$$= \begin{bmatrix} -8 & -1 & -1 & 14 \\ 11 & -3 & 7 & 7 \\ -24 & 4 & -12 & 0 \end{bmatrix}$$

மாதிரிக்கணக்கு (3)

பின்வரும் மூன்று அணிகளைப் பெருக்கி $A(BC) = (AB)C$ என்று சரிபார்க்கவும்.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

A, B, C என்பவை முறையே (3, 3), (3, 2) (2, 2) அணிகளாகும்.

ABC என்ற (3, 2) அணியைக் காணமுடியும்.

$$BC = \begin{bmatrix} 59 & 58 \\ 58 & 59 \\ 58 & 59 \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 59 & 58 \\ 58 & 59 \\ 58 & 59 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 351 & 351 \\ 408 & 411 \\ 291 & 294 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 27 & 27 \\ 33 & 30 \\ 24 & 21 \end{bmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 27 & 27 \\ 33 & 30 \\ 24 & 21 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 351 & 351 \\ 408 & 411 \\ 291 & 294 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A(BC) = (AB)C = ABC = \begin{bmatrix} 351 & 351 \\ 408 & 411 \\ 291 & 294 \end{bmatrix}$$

§ **19-5.** A, B என்பவை சம தரமுள்ள சதுர அணிகள் என்றால், AB என்ற அணியின் அணிகோவையானது A, B என்ற அணிகளின் தனித்தனி அணிகோவைகளைப் பெருக்கி வந்த அணிகோவைக்குச் சமம் ஆகும்.

அதாவது, $|AB| = |A| \times |B| = |BA|$

§ 19-4-லிருந்து இதன் நிறுவல் பெறப்படுகிறது.

§ **19-6.** A, B, C என்ற அணிகள், AB, AC என்ற வரிசையில் பெருக்கலுக்கான இணக்கமுடையதானால்

$A(B+C) + AB + AC$ (பரவு விதி).

§ **19-7.** பூச்சியமல்லாத இரு அணிகளின் பெருக்கம் (product) ஒரு பூச்சிய அணி ஆவதற்கான வாய்ப்பு உண்டு.

அதாவது, $AB = [0]$ என்றால், $A = [0]$ என்றோ, $B = [0]$ என்றோ அறுதியிட்டுக் கூறமுடியாது.

எடுத்துக்காட்டு :

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \neq [0];$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \neq [0],$$

எனினும், $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

§ **19–8.** A என்பது n-தரமுள்ள சதுர அணி என்றும் I, $[0]$ என்பவை முறையே அதே தரமுள்ள அலகு அணி, பூச்சிய அணி என்றும் எடுத்துக்கொண்டால்,

(i) $AI = IA = A$

(ii) $A[0] = [0]A = [0]$

நிறுவல் :

(i) $A = [a_{ij}]$, $I = [b_{ij}]$ என்போம்.

இங்கே, $b_{ii} = 1$, $b_{ij} = 0 \ (i \neq j)$

$\therefore \ AI = C = [c_{ij}]$

இங்கே, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} = a_{ij}\, b_{jj}$
$= a_{ij}$

$\therefore \ AI = A$

இதேபோல் $IA = A$

(ii) இது வெளிப்படையாகத் தெரிவதால் நிறுவல் தேவையில்லை.

எடுத்துக்காட்டு :

(i)

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 8 & 6 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

(ii)

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

§ 19–9. $AAAA$ என்பதை A^4 அல்லது AA^3 அல்லது A^2A^2 என எழுதலாம். ஆனால் A^9/A^5 என்று எழுதுவது விரும்பத்தக்கதல்ல. ஏனென்றால், ஓர் அணியை மற்றோர் அணியால் வகுத்தலுக்குரிய வரைவிலக்கணம் செய்யப்படவில்லை.

$A^0 = I$ என்று எடுத்துக் கொள்வது மரபு.

மாதிரிக்கணக்கு (4)

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$ மற்றும்,

$$B = \begin{bmatrix} \cos h\theta & \sin h\theta \\ \sin h\theta & \cos h\theta \end{bmatrix}$$ என்றால்,

$$A^2 = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix}, \quad B^2 = \begin{bmatrix} \cos h2\theta & \sin h2\theta \\ \sin h2\theta & \cos h2\theta \end{bmatrix}$$

என்றும்,

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix}, \quad B^n = \begin{bmatrix} \cos h\, n\theta & \sin h\, n\theta \\ \sin h\, n\theta & \cos h\, n\theta \end{bmatrix}$$

என்றும் நிறுவுக.

$$A^2 = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & +2\,\text{six}\,\alpha\cos\alpha \\ -2\sin\alpha\cos\alpha & -\sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha & \cos 2\alpha\sin\alpha + \sin 2\alpha\,\text{ccs}\,\alpha \\ -\sin 2\alpha\cos\alpha - \cos 2\alpha\sin\alpha & -\sin 2\alpha\sin\alpha + \cos 2\alpha\cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 3\alpha & \sin 3\alpha \\ -\sin 3\alpha & \cos 3\alpha \end{bmatrix}$$

இதேபோல்,

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix}$$

மேலும்,

$$B^2 = \begin{bmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cosh^2\theta + \sinh^2\theta & 2\cosh\theta\sinh\theta \\ 2\sinh\theta \quad \cosh\theta & \cosh^2\theta + \sinh^2\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cosh^2\theta + \sinh^2\theta & 2\cosh\theta \sin h\theta \\ 2\sinh\theta \quad \cos\theta & \cosh^2\theta + \sinh^2\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cosh 2\theta & \sinh 2\theta \\ \sinh 2\theta & \cosh 2\theta \end{bmatrix}$$

இவ்வாறே, $B^n = \begin{bmatrix} \cosh n\theta & \sinh n\theta \\ \sinh n\theta & \cosh n\theta \end{bmatrix}$

§ **19-10.** A என்ற சதுர அணி $A^2 = A$ என்ற நிபந்தனைக்குட்பட்டால் அதற்கு ஐடெம்பொடென்ட் (idempotent) என்று பெயர்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$ என்பது ஒரு ஐடெம்பொடென்ட்.

A என்ற சதுர அணி, $A^r = (0)$ (r மிகச் சிறிய நேர் முழு வெண்) என்ற நிபந்தனைக் குட்பட்டால், அதற்கு r ஆவது படியுள்ள நில் பொடென்ட் (Nil Potent of rth order) என்று பெயர்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

என்பதால்,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$ என்ற அணி 3 ஆவது படியுள்ள நில் பொடென்ட்.

A என்ற சதுர அணி, $A^{k+1} = A$ (k மிகச் சிறிய நேர் முழு எண்) என்ற நிபந்தனைக்குட்பட்டால் அதற்கு k ஆவது படியுள்ள காலவட்ட அணி (Periodic matrix of kth order).

ஒருபடியுள்ள காலவட்ட அணியே ஐடெம்பொடென்ட் ஆகும்.

§ 19-11. A, B என்ற சமதரமுள்ள சதுர அணிகளைப் பெருக்கி வந்த AB என்ற சதுர அணி பூச்சியக்கோவை அணி (singular matrix) என்றால், A அல்லது B அல்லது இரண்டுமே பூச்சியக் கோவை அணிகளாக இருக்க வேண்டும்.

$|AB| = |A| \cdot |B|$ என்பதிலிருந்து நிறுவல் பெறப்படும்.

§ 19-12. $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ $(i, j = 1, 2, 3)$ என்ற இரண்டு சமதரமுள்ள சதுர அணிகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$A_1 = [a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}]$, $A_2 = [a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23}]$

$A_3 = [a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33}]$ என்றும்

$$B_1 = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{bmatrix}$$

என்றும் எடுத்துக் கொண்டால், A, B அணிகளை

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_1 \\ A_3 \end{bmatrix}$$ என்றும் $B = [B_1 \quad B_2 \quad B_3]$

என்றும் எழுதலாம்.

தேற்றம் : $$AB = \begin{bmatrix} A_1 B_1 & A_1 B_2 & A_1 B_3 \\ A_2 B_1 & A_2 B_2 & A_1 B_3 \\ A_3 B_1 & A_3 B_2 & A_3 B_3 \end{bmatrix}$$

$$[\ AB_1 \quad AB_2 \quad AB_3\ ]$$

$$= \begin{bmatrix} A_1 \quad B \\ A_2 \quad B \\ A_3 \quad B \end{bmatrix}$$

நிறுவல் : $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$ என்பது (3, 1) அணி

$B = [B_1 \quad B_2 \quad B_3]$ என்பது (1, 3) தரமுள்ள அணி.

∴ அணிகளின் பெருக்கல் முறைப்படி.

$$AB = \begin{bmatrix} A_1 B_1 & A_1 B_2 & A_1 B_3 \\ A_2 B_1 & A_2 B_2 & A_2 B_3 \\ A_3 B_1 & A_3 B_2 & A_3 B_3 \end{bmatrix}$$

இப்போது, $[AB_1 \quad AB_2 \quad AB_3]$ என்ற அணியை ஆராய்வோம்.

$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$ என்ற (3, 1) தரமுள்ள அணியையும்

$B_1 = [B_1]$ என்ற (1, 1) தரமுள்ள அணியையும் பெருக்கினால்

$AB_1 = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_1 \\ A_3 & B_1 \end{bmatrix}$ என்ற (3, 1) தரமுள்ள அணி கிடைக்கும்.

இவ்வாறே,

$AB_2 = \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ A_2 & B_2 \\ A_3 & B_2 \end{bmatrix}$ என்ற (3, 1) தரமுள்ள அணியும்,

மற்றும்,

$$AB_3 = \begin{bmatrix} A_1 & B_3 \\ A_2 & B_3 \\ A_3 & B_3 \end{bmatrix}$$

என்ற (3, 1) தரமுள்ள அணியும் கிடைக்கும்.

$$\therefore \; [AB_1 \quad AB^2 \quad AB_3]$$

$$= \left[\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_1 \\ A_3 & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ A_2 & B_2 \\ A_3 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & B_3 \\ A_2 & B_3 \\ A_3 & B_3 \end{bmatrix} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} A_1 B_1 & A_1 B_2 & A_1 B_3 \\ A_2 B_1 & A_2 B_2 & A_3 B_3 \\ A_3 B_1 & A_3 B_2 & A_3 B_3 \end{bmatrix} = AB$$

இதேபோல், $\begin{bmatrix} A_1 B \\ A_2 B \\ A_3 B \end{bmatrix} = AB$

எனவே, $AB = A\,[B_1 \quad B_2 \quad B_3]$

$$= \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} B$$

பயிற்சி 2-2.

(1) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

என்றால், (i) $A + B$ (ii) $A - B$ (iii) $BA - 2B$ காண்க.

(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$,

$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

என்றால் (i) $2A - 3B + 4C$ (ii) $A - \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C$ காண்க.

(3) (a) கொடுத்துள்ள இரண்டு அணிகளுடைய

(i) கூட்டல், (ii) பெருக்கல் (iii) கூட்டலும் பெருக்கலும் எந்த நிபந்தனைக் குட்பட்டுக் காண இயலும்?

(b) $3 \times \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{bmatrix}$

என்றால் x, y, z, w ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

[B. E, '71]

[(b) பகுதியின் விடை :

$$\begin{bmatrix} 3x & 3y \\ 3z & 3w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+x & x+y+6 \\ z+w-1 & 2w+3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad 3x = 4 + x;\ 3y = x + y + 6$$

$$3z = z + w - 1;\ 3w = 2w + 3$$

இவற்றின் தீர்வு : $x = 2$, $y = 4$, $z = 1$, $w = 3$].

(4) $\begin{bmatrix} 3-x & 5 \\ 2 & 1+y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1+2y & 7 \\ 1 & 3+x \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

என்றால் x, y-களின் மதிப்புகளைக் கணக்கிடுக.

(5) $A = \begin{bmatrix} 1+x & x \\ 5+y & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7-x & y \\ 2 & 1+2y \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 20+y & 8 \\ 20 & 20+x \end{bmatrix}$ மற்றும், $2A + 3B = C$

என்றால் x, y-களின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(6) ஒரு சதுர அணியை ஒரு மேல் முக்கோண அணி, ஒரு கீழ் முக்கோண அணி ஆகிய இரண்டின் கூட்டுத் தொகையாக அமைக்க முடியும் என்று காண்பிக்கவும்.

(7) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ -2 & 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -5 & 6 & 8 \\ -1 & -2 & 5 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

என்ற இரண்டு அணிகளின் பெருக்கலை AB, BA என்ற வரிசையில் காண்க. காணமுடியாதென்றால், காரணத்தை விளக்குக.

(8) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ என்றால்,

AA, BA, AC, CA ஆகியவற்றைக் காண்க. AB-ம் BA-ம் அவ்வாறே AC-ம் CA-ம் சமமா என்று சரிபார்க்கவும்.

(9) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ -1 & -2 & 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$

என்றால்,

$AB = \begin{bmatrix} 65 & 110 \\ 220 & 260 \\ 25 & 28 \end{bmatrix}$ என்று காண்பிக்கவும்.

(10) (a) A_{mn}, B_{pq} என்ற இரு அணிகள் எப்போது (i) கூட்டலுக்கு (ii) பெருக்கலுக்கு இணக்கம் உள்ளவை (conformable)?

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$

என்றால் AB மற்றும் BA காண்க. [B. E. '70]

(11) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ என்ற அணிகளுக்கு

$AB = AC$ என்று காண்பிக்கவும். இந்தச் சமன்பாட்டிலிருந்து $B = C$ என்று தீர்மானிக்க முடியுமா?

(12) $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$= [\, ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy \,]$

என்று காண்பிக்கவும்.

(13) $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\times \begin{bmatrix} 2 & 7 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -32 & -112 \\ 16 & 56 \\ 64 & 224 \end{bmatrix}$$ எனக் காண்பிக்கவும்.

(14) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

என்றால் $A^2 - 3A + 2I = [0]$ என்று காண்பிக்கவும்.

(15) $A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$,

$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ என்றால்

(i) $BC = A$, $CA = B$, $CB = -A$, $AC = -B$ என்றும்,

(ii) $A^2 = B^2 = C^2 = -I$ என்றும் நிறுவுக.

(16) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$ என்றால்,

(i) $A^3 - 4A^2 - A + 4I_2$

(ii) $B^3 - 4B^2 - B + 4I_3$

(iii) $C^3 - 4C^2 - C + 4I_3$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

(17) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ மற்றும்

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ என்றால்,

$$(A - 3I_2)(A - 2I_2) = (A - 2I_2)(A - 3I_2) = A^2 - 5A + 6I_2$$

$$(B - 3I_3)(B - 2I_3) = (B - 2I_3)(B - 3I_3) = B^2 - 5B + 6I_3$$

என்று காண்பிக்கவும். எல்லா சதுர அணிகளுக்கும் மேற்கண்ட சமன்பாடு பொருந்துமா ?

(18) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{bmatrix}$ என்றால்,

$A(A - I)(A + 2I) = [0]$ என்று காண்பிக்கவும்.

(19) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ என்றால்,

$A^2 = I$ என்று நிறுவுக.

(20) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3x \\ \frac{3}{x} & 2 \end{bmatrix}$ என்றால்,

x-ன் மதிப்பு எதுவானாலும், $A^2 - 4A - 5I = [0]$ என்று காண்பிக்கவும்.

(21) (a) $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

என்போம்.

$PQ = QP$ என்றால், a, b, c, d-களின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ என்றால் A^2, A^3 ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக. இதிலிருந்து A^n $(n = 4, 5, \ldots)$ ஆகியவற்றையும் கணக்கிடுக. [B. E. '72]

(22) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ என்றால்,

$(A - I)(A - 4I) = 0$ என நிறுவுக. இதைக் கொண்டு $A^8 - A$ஐக் காண்க. [Madurai B. E. '70]

(23) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ என்றால்,

$A^3 - 4A^2 - 3A + 11I = 0$ என நிறுவுக.

(24) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

என்றால் $AB = BA = 0$ என நிறுவுக.

(25) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{-2}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{-2}{6} & \frac{4}{6} & \frac{-2}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{-2}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$

ஆகிய இரு அணிகளும் "ஐடெம்பொடென்ட்" என்று காண்பிக்கவும்.

(26) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ என்பது 2 ஆவது படி

கால வட்ட அணி (periodic matrix of 2nd order) என்று காண்பிக்கவும்.

(27) $\begin{bmatrix} ab & b^2 \\ -a^2 & ab \end{bmatrix}$ மற்றும், $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$

ஆகிய இரு அணிகள் நில் பொடென்ட் (nil potent) என நிறுவுக. அவற்றின் படிகள் யாவை?

(28) (a) அணி இயற்கணிதத்தில் பொதுவாக $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$ என்பதை விளக்குக. எப்போது $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ ஆகும்?

(b) $A^2 - 5A + 7I_2 = 0$ என்ற அணிச்சமன்பாட்டின்

ஒரு தீர்வு $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ என்று காண்பிக்கவும்.

[B. Tech '73; Kerala Engg. '66]

விடைகள்

(1) (i) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} -2 & -1 & 6 \\ 2 & 9 & 1 \\ 3 & 10 & -3 \end{bmatrix}$

(2) (i) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 24 & 21 & 15 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} & \frac{7}{6} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$

(4) $x = y = 1$. (5) $x = 1,\ y = 2$. (7) AB - ம், BA - ம் பெருக்கலுக்கு இணக்கமுள்ளவை.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 21 & 35 \\ 2 & 42 & 70 \\ -29 & 27 & 19 \end{bmatrix} \quad BA = \begin{bmatrix} 0 & 36 & 12 & 28 \\ -9 & 54 & -3 & 20 \\ -15 & 15 & -30 & -25 \\ 9 & 18 & 27 & 36 \end{bmatrix}$$

(8) $AB = CA = [\ 0\ ]$; $BA = \begin{bmatrix} -8 & 7 & -10 \\ 48 & -42 & 60 \\ 40 & -35 & 50 \end{bmatrix}$

$$AC = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ -20 & -20 & 20 \\ -16 & -16 & 16 \end{bmatrix} \quad AB \neq BA;\ AC \neq CA$$

(10) $AB = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} = BA$

(16) (i) $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -12 & 10 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 12 & 0 & -8 \\ 8 & 12 & 0 \\ 0 & 8 & 12 \end{bmatrix}$

(21) (*a*) $a = d$, $c = 0$, b ஏதாவது ஒரு கணியம்.

(*b*) $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 2^n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. திருப்பு அணிகளும், நேரெதிர் அணிகளும்

(TRANSPOSE AND INVERSE MATRICES)

§20. திருப்பு அணிகளின் முன்பின்னுக்கு விதி (Reversal Law for the transpose matrices)

A, *B* என்ற இரு அணிகள் *A B* வரிசையில் பெருக்கலுக்கு இணக்கமுள்ளவையானால்

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

நிறுவல் : *A* என்பது (m, n) அணி, *B* என்பது (n, p) அணி என்றால், $C = A\,B$ என்பது (m, p) அணி ஆகும்.

$$A = [\,a_{ij}\,] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1}n \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2}n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$B = [\,b_{ij}\,] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{np} \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad C = AB = [\, c_{ij} \,]$ என்றால்

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ir}\, b_{kj} \text{ ஆகும்}$$

இப்போது, $C^T = (AB)^T = [\, c'_{ij}]$ எனக் கொள்வோம், இதனால், $(AB)^T$-ல் i ஆவது நிரை j ஆவது நிரலில் உள்ள மூலகமாவது (AB)-ல் jஆவது நிரை, i ஆவது நிரலில் உள்ள மூலகமாகும்.

$$\text{அதாவது, } c'_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\, b_{ki} \qquad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

B^T-ல் i ஆவது நிரையில் உள்ள மூலகங்களும் B-ல் i ஆவது நிரலில் உள்ள மூலகங்களும் ஒன்றேயாகும். அதாவது, $b_{1i}\, b_{2i} \ldots b_{ni}$ ... ... (2)

இதேபோல், A^T-ல் j ஆவது நிரலில் உள்ள மூலகங்களும் A-ல் jஆவது நிரையில் உள்ள மூலகங்களும் ஒன்றேயாகும்.

$$\text{அதாவது, } \left.\begin{array}{l} a_{j1} \\ a_{j2} \\ \vdots \\ a_{jn} \end{array}\right\} \qquad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

$\therefore \quad B^T \; A^T$-ல் i ஆவது நிரையிலும், jஆவது நிரலிலும் உள்ள மூலகம்

$$= \sum_{k=1}^{n} b_{ki}\, a_{jk}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\, b_{ki}$$

$$= c'_{ij} \qquad [\text{ சமன்பாடு } (1)\,]$$

எனவே, $(AB)^T = B^T\, A^T$

துணைமுடிவு : $(A\ B\ C \ldots L)^T = L^T \ldots C^T\ B^T\ A^T$

மாதிரிக்கணக்கு (1)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

என்றால் $(AB)^T = B^T\ A^T$ என்ற தேற்றத்தைச் சரிபார்க்கவும்.

$$AB = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad (AB)^T = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix}$$

மேலும், $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad B^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad B^T\ A^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= (AB)^T$$

மாதிரிக்கணக்கு (2)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$ மற்றும்,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$ என்றால்

AB என்ற பெருக்கல் காணமுடியுமா ? அப்படிக் காண முடிந்தால் $(AB)^T = B^T\ A^T$ என்ற தேற்றத்தைச் சரிபார்க்கவும். [B.E. '71]

A என்பது (2, 3) அணி, B என்பது (3, 4) அணி.

∴ AB என்ற வரிசையில் பெருக்கல் காண முடியும். AB என்பது (2, 4) அணி ஆகும். (BA காண முடியாது).

$$AB = \begin{bmatrix} 2-2+0 & -8+1+0 & 0-3+0 & 2+1+0 \\ 1+0-12 & -4+0+0 & 0+0+6 & 1+0+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -7 & -3 & 3 \\ -11 & -4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad (AB)^T = \begin{bmatrix} 0 & -11 \\ -7 & -4 \\ -3 & 6 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},$$

இப்போது,

$$B^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

$$\therefore \quad A^T B^T = \begin{bmatrix} 2-2+0 & 1+0-12 \\ -8+1+0 & -4+0+0 \\ 0-3+0 & 1+0+0 \\ 2+1+0 & 1+0+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -11 \\ -7 & -4 \\ -3 & 6 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = (AB)^T$$

§ 21. சேர்ப்பு அணி (Adjoint matrix)

வரைவிலக்கணம் : $A = [a_{ij}]$ ஒரு சதுர அணியைக் குறிக்கட்டும். A_{ij} என்பது அணிகோவை $|A|$ -ல் மூலகம் a_{ij}-ன் இணைக்காரணி (cofactor) என்ருல், அணி $[A_{ij}]$-ன் திருப்பு அணி அதாவது, $[A_{ij}]^T$, A-ன் **சேர்ப்பு அணி** (adjoint matrix அல்லது adjoint) என்று பெயர் பெறும். இதைச் சுருக்கமாக adj A என்று எழுதுவது வழக்கம்.

§ 21-1. தேற்றம்.

A என்பது n–தரமுள்ள பூச்சியமில் கோவை சதுர அணி, மற்றும் என்பது அதே தரமுள்ள அலகு அணி என்ருல்,

A (adj A) = (adj A) A = | A | I.

நிறுவல் : $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ என்ருல்,

$$|A| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

மேலே விளக்கிய குறியீடுகளைக் கொண்டு

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$ என எழுதலாம்.

$\therefore\ \boldsymbol{A}\,(\text{adj } \boldsymbol{A})$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}\boldsymbol{A}_{12} + a_{12}\boldsymbol{A}_{12} + a_{13}\boldsymbol{A}_{13} & 0 & 0 \\ 0 & a_{21}\boldsymbol{A}_{21} + a_{22}\boldsymbol{A}_{22} + a_{23}\boldsymbol{A}_{23} & 0 \\ 0 & 0 & a_{31}\boldsymbol{A}_{31} + a_{32}\boldsymbol{A}_{32} + a_{33}\boldsymbol{A}_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} |\boldsymbol{A}| & 0 & 0 \\ 0 & |\boldsymbol{A}| & 0 \\ 0 & 0 & |\boldsymbol{A}| \end{bmatrix} \quad \text{— (1).}$$

(§5.3, 5.4)

$$= |\boldsymbol{A}| \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

அதாவது, $\boldsymbol{A}\,(\text{adj}) = |\boldsymbol{A}| \cdot I$

இதேபோல், $(\text{adj } \boldsymbol{A})\ |\boldsymbol{A}| \cdot I$

குறிப்பு : சமன்பாடு (1)-லிருந்து

$$|\boldsymbol{A}| \times |\text{adj } \boldsymbol{A}| = \begin{bmatrix} |\boldsymbol{A}| & 0 & 0 \\ 0 & |\boldsymbol{A}| & 0 \\ 0 & 0 & |\boldsymbol{A}| \end{bmatrix} = |\boldsymbol{A}|^3$$

$$\therefore\quad |\text{adj } \boldsymbol{A}| = |\,|\boldsymbol{A}|^2$$

{ இங்கே $\boldsymbol{A}$ ஒரு (3, 3) சதுர அணி }.

இந்த விளைவைப் பொதுமைப் படுத்தினால் பின்கண்ட தேற்றம் கிடைக்கும் :

A என்பது (n, n) தரமுள்ள பூச்சியமில் கோவை சதுர அணி என்றால் $|\text{adj A}| = |\text{A}|^{n-1}$.

§ 22. நேரெதிர் அணி (Inverse Matrix)

வரைவிலக்கணம் : A என்பது n தரமுள்ள பூச்சியமில் கோவை சதுர அணி என்றும், I என்பது அதே தரமுள்ள அலகு அணி என்றும் கொள்வோம். B என்ற மற்றொரு சதுர அணியானது $AB = BA = I$ என்ற நிபந்தனைக்குட்பட்டு இருப்பின், B ஐ A-ன் நேரெதிர் அணி (Inverse matrix) என்பர். B-ம் n தரமுள்ள சதுர அணியாகத்தான் இருக்க முடியும் என்பது எளிதில் பெறப்படும்.

பொதுவாக A-ன் நேரெதிர் அணியை A^{-1} என்ற குறியீட்டால் குறிப்பது வழக்கம். அதாவது, $A A^{-1} = A^{-1} A = I$.

(A^{-1} ஐ $\frac{1}{A}$ என எழுதக்கூடாது.)

§ 2-21. தேற்றம் :

$$A^{-1} = \frac{[A_{ij}]^T}{|A|} = \frac{[A_{ij}]}{|A|} = \frac{\text{adj } A}{|A|}$$

நிறுவல் : A என்பது பூச்சியமில் கோவை சதுர அணி என்பதால் $|A| \neq 0$

$$\therefore \; A \cdot \frac{[A_{ij}]^T}{|A|} = \frac{A\,[\text{adj} A]}{|A|}$$

$$= \frac{1}{|A|} \cdot |A|\, I \quad (\S 21 \cdot 1)$$

$$= I$$

அதாவது, $A \left\{ \frac{\text{adj } A}{|A|} \right\} = I$

இதேபோல், $\left\{ \frac{\text{adj } A}{|A|} \right\} A = I$ என நிறுவலாம்.

$$\therefore \; A^{-1} = \frac{adj\ A}{|A|}.$$

[குறிப்பு (i) : A என்பது ஒரு பூச்சியக்கோவை அணியானால் அதற்கு நேரெதிர் அணி கிடையாது என்பது மேற்கண்ட தேற்றத்திலிருந்து பெறப்படுகிறது.]

(ii) $(A^{-1})^{-1} = A$ என்பது வெளிப்படை.

(iii) $AA^{-1} = I$ என்பதால், $|A| \cdot |A^{-1}| = |I| = 1$

$$\therefore \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

(iv) $I \cdot I = I$ என்பதால், $I^{-1} = I$

(v) § 35-ல் ஓர் அணியின் நேரெதிர் அணி காண்பதற்கு வேறு முறைகளை விளக்கியுள்ளோம்.

§ 22-2. தேற்றம்

கொடுத்துள்ள ஒரு பூச்சியமில் கோவை அணிக்கு ஒரேயொரு நேரெதிர் அணிதான் உண்டு.

அணி A-க்கு B, C என்ற இரண்டு நேரெதிர் அணிகள் உண்டென்று வைத்துக் கொண்டால்,

$$AB = BA = I$$

$$AC = CA = I$$

$$\therefore \quad CAB = C(AB) = CI = C$$

மேலும், $CAB = (CA)B = IB = B$

$$\therefore \quad B = C$$

எனவே, கொடுத்துள்ள ஒரு பூச்சியமில் கோவை அணிக்கு ஒரேயொரு நேரெதிர் அணிதான் உண்டு.

§ 23. தேற்றம்

A, B என்பவை சம தரமுள்ள பூச்சியமில் கோவை சதுர அணிகளானுல் $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

இதற்கு நேரெதிர் அணிகளின் முன் பின்னுக்கு விதி (Reversal law for Inverse matrices) என்று பெயர்.

நிறுவல் : இந்தத் தேற்றத்தை நிறுவுவதற்கு $(B^{-1}A^{-1})(AB) = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$ என்று காண்பித்தல் போதுமானது.

இப்போது, $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B$

$$= B^{-1}IB$$

$$= B^{-1}B$$

$$= I$$

மேலும், $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1}$

$= A\,I\,A^{-1}$

$= A\,A^{-1}$

$= I$

$\therefore\ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

துணைமுடிவு :

$$(ABC\ldots L)^{-1} = L^{-1}\ldots C^{-1}\,B^{-1}\,A^{-1}.$$

§ 24. தேற்றம் : $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

நிறுவல் :

$$A\,A^{-1}\,A^{-1}\,A = I \qquad (\S\,22)$$

$$\therefore\ I^T = (A\,A^{-1})^T = (A^{-1})^T\,A^T \qquad (\S\,20)$$

ஆனால், $I^T = I$

$$\therefore\ (A^{-1})^T A^T = I$$

அதாவது, A^T-ன் நேரெதிர் அணி $(A^{-1})^T$

ஆகவே, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

§ 25. அணிமுறையில் ஒருங்கைச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணல்

விளக்கம் எளிதாக இருப்பதற்குக் கீழ்வரும் மூன்று ஒருங்கைச் சமன்பாடுகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$$

(மாறு உறுப்புகள் வலப்பக்கத்தில் அமைந்திருப்பதைக் கவனிக்கவும்.)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$ என்க.

A ஐக் குணக அணி (matrix of coefficients) என்பர்.

A என்பது (3, 3) அணி, X என்பது (3, 1) அணி ஆதலால், AX என்பது (3, 1) அணியாகும்.

இரு அணிகளைப் பெருக்கும் முறையை நினைவில் கொண்டால், கொடுத்துள்ள மூன்று சமன்பாடுகளைச் சுருக்கமாக

$$AX = B \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

என்று எழுதலாம்.

இப்போது $|A| \neq 0$ என்போம். இதனால் A-ன் நேரெதிர் அணி A^{-1} காண முடியும். சமன்பாடு (1)-ன் இரு பக்கங்களையும் A^{-1} ஆல் முன் காரணியாகப் பெருக்கினால்,

$$A^{-1}\,AX = A^{-1}\,B$$

அதாவது, $$IX = A^{-1}\,B$$

அதாவது, $$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{B}.$$

§22–1-ல் விளக்கியவாறு A^{-1} ஐக் காணலாம். A^{-1} என்பது (3, 3) அணியாகும். எனவே, இதை B என்ற (3, 1) அணியுடன் முன் காரணியாகப் பெருக்க இயலும். அப்போது $A^{-1}\,B$ என்பது (3, 1) அணியாகும். X என்பது (3, 1) அணி. எனவே, $X = A^{-1}\,B$ என்ற சமன்பாட்டில் X-ன் மூலகங்கள் (தெரியாக் கணியங்கள்), A^{-1} B-ன் (கணக்கீடு செய்யப்பட்ட) ஒத்த மூலகங்களுக்குச் சமம் ஆகும்.

இதனால் x, y, z-களின் மதிப்புகள் அறியப்படும்.

குறிப்பு (1): 3 சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணும் முறையை இங்கே விளக்கியுள்ள போதிலும், இந்த முறை n சமன்பாடுகளுக்கும் பொருந்தும்.

(2) தெரியாக் கணியங்களின் அணி (matrix of unknowns) மற்றும் மாறு உறுப்பு அணி (matrix of constant terms) ஆகியவற்றை நிரல் வெக்டர்களாக எடுத்துக்கொள்ளவேண்டும் என்பதை நினைவில் கொள்க.

(3) குணக அணி A ஒரு பூச்சியமில் கோவை அணியானால் மட்டுமே மேற்கூறிய முறையைப் பயன்படுத்திச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண முடியும். குணக அணி பூச்சியக் கோவை அணியாகும்போது சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணும் முறை பின்பு விளக்கப்படும்.

மாதிரிக்கணக்கு (3)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ என்ற அணியின்

சேர்ப்பு அணி, மற்றும் நேரெதிர் அணி காண்க. [B. Tech '71]

கொடுத்துள்ள அணியை $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

என்று குறிப்போம்.

A_{rs} என்பது a_{rs}-ன் இணைக்காரணியைக் குறித்தால்,

$A_{11} = 1 - 0 = 1, \quad A_{12} = -(2 - 0) = -2,$

$A_{13} = 0 + 1 - 1$

$A_{21} = -(2 - 0) = -2, \quad A_{22} = 1 + 1 = 2,$

$A_{23} = -(0 + 2) = -2$

$A_{31} = 0 = -1, \quad A_{32} = -(0 - 2) = 2,$

$A_{33} = 1 - 4 = -3$

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{12}$$

$$= 1(1) + 2(-2) + 1(1) = 1 - 4 + 1 = -2$$

$$\therefore \quad \text{adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

மற்றும்,

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

மாதிரிக்கணக்கு (4)

அணி முறையைப் பயன்படுத்திக் கீழ்க்கண்ட ஒருங்கைச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளைக் காண்க :

(i) $2x + y = 4, \quad 5x - 2y = 1$

(ii) $x - 2y + z = 3, \quad x + 3z = 11, \quad -2y + z = 1$

[B. E. '70]

(i) கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகளின் குணக அணி

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix},$$

தெரியாக்கணிய நிரல் வெக்டர்

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

மாருவுறுப்பு நிரல் வெக்டர்

$$B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

இங்கே, $A^{-1} = -\frac{1}{9}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad A^{-1}B = -\frac{1}{9}\begin{bmatrix} -18 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

ஆனல், $X = A^{-1}B \quad \therefore \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

எனவே, $x = 1, \quad y = 2.$

(ii) இங்கு, குணக அணி $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ என்றும், $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix}$

என்றும் கொள்வோம்.

வழக்கமான குறியீடுகளுடன்,

$A_{11} = 6, \quad A_{12} = -1, \quad A_{13} = -2, \quad A_{21} = 0$

$A_{22} = 1, \quad A_{23} = 2, \quad A_{31} = -6, \quad A_{32} = -2,$

$A_{33} = 2$

$\therefore \quad |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$

$= 1(6) - 2(-1) + 1(-2) = 6$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{adj\ A}{|A|} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6 & 0 & -6 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^{-1} B = \begin{bmatrix} 18 + 0 - 6 \\ -3 + 11 - 2 \\ -6 + 22 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ஆனால், $X\ A^{-1} B$. அது, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad \mathbf{x = 2, \quad y = 1, \quad z = 3}$

மாதிரிக்கணக்கு (5)

கீழ்வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளை அணிமுறையைப் பயன் படுத்திக் கணக்கிடுக :

$$x + y + z = 6$$
$$x + 2y + 3z = 14$$
$$-x + y - z = -2$$

குணக அணி $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

தெரியாக்கணிய அணி $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

மாறு உறுப்பு அணி $B = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \\ -2 \end{bmatrix}$

a_{ij}–ன் இணைக்காரணி A_{ij} என்றால்,

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1+3) = -2$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1-1) = 2$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(1+1) = -2$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(3-1) = -2$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

$$\therefore \text{adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = a_{11}\ A_{11} + a_{12}\ A_{12} + a_{13}\ A_{13}$$
$$= 1\,(-5) + 1\,(-2) + 1\,(-3) = -4$$

$$\therefore\quad A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|} = -\frac{1}{4} \times \begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}B = -\frac{1}{4} \times \begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{4} \times \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \\ -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ஆனால், $X = A^{-1}B$.

அதாவது, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

எனவே, $x = 1,\quad y = 2,\quad z = 3.$

பயிற்சி—3.

(1) திருப்பு அணியின் வரைவிலக்கணம் கூறுக. கீழ்க் கண்டவற்றின் திருப்பு அணிகளை எழுதுக.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

[B. E. '71]

(2) (a) A என்பது ஒரு (m, n) அணி, B என்பது ஒரு (p, q) அணி என்றால், அவற்றை (i) கூட்டுவதற்கு (ii) பெருக்கு வதற்கான நிபந்தனைகள் யாவை ?

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

என்றால், AB, BA, AA^T, $B^T B$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

[B. E. '73]

(3) (a) ஓர் அணியின் திருப்பு அணிக்கான வரைவிலக் கணம் யாது ? ஓர் அணியை அதன் திருப்பு அணியால் முன் காரணியாகவும் பின் காரணியாகவும் பெருக்கலாம் என்று காண் பிக்கவும். அந்த இரண்டு பெருக்கங்களும் எப்போது சமம் ஆகும் என்று விளக்குக.

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ என்றால் AA^T, $A^T A$ காண்க.

[B. E. '72]

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ எனில்

AA^T, $A^T A$ ஆகியவற்றைக் காண்க. [B. E, 74]

(4) $A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \text{adj } A$ என நிறுவுக.

(5) (a) $(\text{adj } A)^T = \text{adj }(A^T)$

(b) $\text{adj }(AB) = (\text{adj } B)\ \text{adj } A)$. என நிறுவுக.

(6) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ என்றால் $\text{adj } A = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -15 & 8 & -1 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

என்று காண்பிக்கவும்.

(7) கணக்கு (6)-ல் கொடுத்துள்ள A என்ற அணியின் திருப்பு அணி மற்றும் நேரெதிர் அணி காண்க.

(8) கீழ்வரும் சதுர அணிகளின் நேரெதிர் அணிகளைக் காண்க.

(அ) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (ஆ) $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(இ) $\begin{bmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{bmatrix}$ (ஈ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(உ) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ (ஊ) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

(எ) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

[B. E. '74]

(9) கொடுத்துள்ள ஓர் அணியின் நேரெதிர் அணியின் வரைவிலக்கணத்தையும், அது உண்டென்பதற்கான நிபந்தனைகளையும் தருக.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

என்பதன் நேரெதிர் அணி காண்க. [B. E. '72]

(10) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

என்ற இரு அணிகளின் நேரெதிர் அணிகளான A^{-1} B^{-1} ஆகியவற்றைக் காண்க. மேலும் $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ என்ற தேற்றத்தைச் சரிபார்க்கவும். [B. E. '71]

(11) கொடுத்துள்ள ஓர் அணியின் (i) திருப்பு அணி (ii) சேர்ப்பு அணி (iii) நேரெதிர் அணி ஆகியவற்றின் வரைவிலக்கணம் தருக. அவைகள் உண்டென்பதற்கான நிபந்தனை ஏதாவது இருந்தால் குறிப்பிடுக.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 6 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

என்பதன் நேரெதிர் அணி காண்க.

(12) $$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\tan\frac{\theta}{2} \\ \tan\frac{\theta}{2} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & \tan\frac{\theta}{2} \\ -\tan\frac{\theta}{2} & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

என்று காண்பிக்கவும்.

(13) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 4 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$ என்பதன் நேரெதிர் அணி காண்க.

[Madurai B. E. '70]

(14) $$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \times A \times \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

என்றால் A ஐக் காண்க. [Madurai B. E. '71]

(15) $D = \text{diag}\ (d_1, d_2, \ldots d_n)$, $d_1\, d_2 \ldots d_n \neq 0$ என்றால் $D^{-1} = \text{diag}\,(d_1^{-1}, d_2^{-1}, \ldots d_n^{-1})$ என நிறுவுக. [M. Sc. '71]

(16) அணி முறையைப் பயன்படுத்திக் கீழ்க்கண்ட ஒருங்கைச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளைக் காண்க.

(a) $4x + 3y + 6z = 25$
$x + 5y + 7z = 13$
$2x + 9y + z = 1$

(b) $5x + 3y + 3z = 48$
$2x + 6y - 3z = 18$
$8x - 3y + 2z = 21$

[B. E. '65]

(c) $x + y + 2z = 4$
$2x - y + 3z = 9$
$3x - y - z = 2$

[B. E. '65)

(d) $2x - 2y + z = 2$
$2x + y - z = 0$
$x + 3y + 2z = 2$

(e)
$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ 3x - y + 2z &= 1 \\ 2x - 2y + 3z &= 2 \end{aligned}$$
[B. E. '72]

(f)
$$\begin{aligned} 4x + 3y + 2z &= 1 \\ 3x + 2y + z &= 3 \\ 2x + y + z &= 4 \end{aligned}$$
[Kerala Engg '68]

(g)
$$\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ 2x + 3y - 4z &= 2 \\ 3x - 4y - 2z &= 7 \end{aligned}$$
(Kerala Engg '68]

(h)
$$\begin{aligned} 4x + 3y + 6z &= 25 \\ x + 5y + 7z &= 13 \\ 2x + 9y + z &= 1 \end{aligned}$$
[Madurai B. E. '71]

(i)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + x_3 - x_4 &- 3 \\ x_1 - x_3 - x_4 &= 4 \\ x_1 + x_2 = x_4 &= 1 \end{aligned}$$
[Karala Engg. '67]

(j)
$$\begin{aligned} 2x - 3y &= -13 \\ x + 4y &= 10 \end{aligned}$$
[B. E. '74]

(k)
$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 4 \\ x - 2z &= -1 \\ 4x + y - z &= 1 \end{aligned}$$
[B. E. '74]

(17) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ என்பதன் நேரெதிர் அணிகாண்க.

இதைப்பயன்படுத்தி

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 &= 10 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned}$$

என்ற ஒருங்கைச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க.

[Kerala Engg. '67]

(18) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

என்ற அணியின் நேரெதிர் அணி காண்க. [Kerala Engg. '67]

(19) $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 9 & 1 \end{bmatrix}$ என்ற நேரெதிர் அணி காண்க.

இதைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் ஒருங்கைச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க:

$$4x + 3y + 6z = 25, \quad x + 5y + 7z = 13$$
$$2x + 9y + z = 1,$$ [Kerala Engg. '65]

(20) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ என்றால் A^{-1} காண்க. இதைப் பயன்படுத்தி $3x + y = 2$; $x - 2y = 3$ என்ற சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க.

(21) $A, B, A+B$ என்பவை பூச்சியமில் கோவை அணிகளைக் குறித்தால்

$$(A^{-1}+B^{-1})^{-1} = A(A+B)^{-1}B = B(A+B)^{-1}A$$

என நிறுவுக. [B. E. '74]

விடைகள்

(1) $A^{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, $B^{T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

(2) (b) $AB = \begin{bmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 15 & -21 \\ 10 & -3 \end{bmatrix}$

$AA^{T} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -10 \\ 2 & 1 & -3 \\ -10 & -3 & 25 \end{bmatrix}$, $B^{T}B = \begin{bmatrix} 10 & 10 & -5 \\ 10 & 20 & 10 \\ -5 & 10 & 25 \end{bmatrix}$

(3) (b) $AA^{T} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 26 \end{bmatrix}$, $A^{T}A = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 12 \\ 0 & 10 & -4 \\ 12 & -4 & 16 \end{bmatrix}$

(c) $AA^{T} = A^{T}A = \text{diag}\,(4, 4, 4, 4)$

(7) $A^{T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 5 & -\frac{8}{3} & \frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(8) (அ) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 3 & 1 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (ஆ) $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(இ) $\begin{bmatrix} a - ib & -c - id \\ c - ib & a + id \end{bmatrix}$ (ஈ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(உ) $\begin{bmatrix} \frac{31}{42} & \frac{17}{21} & \frac{1}{6} & \frac{-13}{21} \\ \frac{23}{42} & \frac{16}{21} & -\frac{1}{6} & \frac{-11}{21} \\ \frac{29}{42} & \frac{22}{21} & -\frac{1}{6} & \frac{-23}{21} \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(ஊ) $\frac{1}{7} \times \begin{bmatrix} -3 & 8 & 6 \\ 7 & -14 & -7 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

(எ) $\frac{-1}{12} \begin{bmatrix} 7 & 6 & -5 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

(ஏ) $-\frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} -31 & 17 & 22 \\ -9 & 5 & 6 \\ 14 & -8 & -10 \end{bmatrix}$

(10) $A^{1-} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$ $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$

(11) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ (13) $\begin{bmatrix} -26 & -7 & 12 \\ 11 & 3 & -5 \\ -5 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

(14) $\begin{bmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{bmatrix}$

(16) (a) $x = 4, y = -1, z = 2$

(b) $x = 3, y = 5, z = 6$

(c) $x = 1, y = -1, z = 2$

(d) $x = \frac{3}{8}, \quad y = -\frac{1}{8}, \quad z = 1$

(e) $x = -1, y = 4, z = 4$

(f) $x = 6, y = -7, z = -1$

(g) $x = \frac{5}{31}, \quad y = \frac{-32}{31}, \quad z = \frac{-37}{31}$

(h) $x = 4, y = -1, z = 2$

(i) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1, x_4 = -2$

(j) $x = -2, y = 3,$

(k) $x = \frac{5}{6}, y = -\frac{17}{12}, \quad z = \frac{11}{12}$

(17) $x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = -2$

(18) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

(19) $-\dfrac{1}{199} \times \begin{bmatrix} -58 & 51 & -9 \\ 13 & -8 & -22 \\ -1 & -30 & 17 \end{bmatrix}$

$x = 4, \quad y = -1, \quad z = 2$

(20) $A^{-1} = \dfrac{1}{7} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$; $x = 1, \quad y = -1$

4. அணி அளவை

(RANK OF A MATRIX)

§ 26. சிற்றணி, சிற்றணிகோவை (Sub-matrix and determinant of the sub-matrix or minor)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ என்ற (m, n) அணியிலிருந்து

பெறப்படும்.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{85} & a_{86} & \cdots & a_{8l} \\ a_{95} & a_{96} & \cdots & a_{9l} \\ & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m5} & a_{m6} & \cdots & a_{ml} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{33} \end{bmatrix} \cdots \cdots$$

போன்ற அணிகளுக்கு சிற்றணிகள் (sub-matrices) என்று பெயர். ஒரு சதுர சிற்றணியின் அணி கோவைக்குச் சிற்றணி கோவை

(determinant of the submatrix or minor) என்று பெயர். (சதுரமல்லாத சிற்றணிகளுக்கு அணிகோவை கிடையாது என்பது வெளிப்படை.)

§ 27. அணி அளவை (Rank of a Matrix)

அணிக்கோட்பாட்டின் சிறப்புக் கொள்கைகளில் ஒன்று அணி அளவை (Rank of a matrix) ஆகும்.

ஒருபடிச் சமன்பாட்டுக் கொள்கை (Theory of Linear Equations), வெக்டர் வெளிக் கொள்கை (Vector space theory) முதலியவற்றில் அணி அளவை அதிக அளவில் பயன்படுகிறது.

வரைவிலக்கணம்

ஓர் அணியிலிருந்து கிடைக்கப் பெறும் பூச்சியமில்கோவை சிற்றணிகளில் மிகப் பெரியவற்றின் தரத்திற்கு அந்த அணியின் "அணி அளவை" (Rank of the matrix) என்று பெயர். "அணி அளவை" என்பதைச் சுருக்கமாக "அளவை" என்று இனி குறிப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$ என்ற அணியிலிருந்து

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 7 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

என்ற நான்கு (3, 3) தரமுள்ள சதுர அணிகள் கிடைக்கும். ஆனால் இந்த நான்கு அணிகளின் அணிகோவைகளும் சுழி (zero) மதிப்புடையவை. எனவே, A-ன் அளவை 3 அல்ல.

ஆனால் A-யிலிருந்து கிடைக்கப் பெறும் பதினெட்டு (2, 2) தரமுள்ள சதுர அணிகளில் ஒன்று $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. இந்த அணியின்

அணி கோவை $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2 \neq 0.$

எனவே, கொடுத்துள்ள அணி A-ன் அளவை 2 ஆகும்.

குறிப்பு : (1) A என்ற அணியின் "அளவை"யை $r(A)$ என்ற குறியீட்டால் குறிப்பது வழக்கம்.

(2) ஓர் அணியின் அளவை r என்றால் அந்த அணியின் $(r+1)$ தரமுள்ள சதுர சிற்றணி கோவைகள் அனைத்தும் சுழி மதிப்பு உடையனவாகும்.

(3) m, n என்ற இரு கணியங்களில் மிகச் சிறிய மதிப்புடையவற்றைக் குறிக்க "சிறுமம் (m, n)" [minimum (m, n)] என்ற குறியீட்டைப் பயன்படுத்துவோம்.

ஓர் அணி (m, n) தரமுள்ளதானால், அதன் அளவை $\leqslant$ சிறுமம் (m, n).

$m < n$ என்றால் அந்த அணியிலிருந்து கிடைக்கப் பெறும் மிகப் பெரிய சதுர அணிகோவை m தரமுள்ளதாகும். இந்த m தரமுள்ள அணிகோவையின் மதிப்பு $\neq 0$ என்றால், அணியின் அளவை m ஆகும். ஆனால், இந்த m தரமுள்ள எல்லா சதுர அணிகோவைகளின் மதிப்புகளும் சுழி மதிப்புடையவையானால், அணியின் அளவை $< m$ ஆகும். ஆகவே, அணியின் அளவை $\leqslant$ சிறுமம் (m, n).

(4) A என்ற n தரமுள்ள சதுர அணி பூச்சியமில் கோவையுள்ளதானால் (non-singular), A-ன் அளவை n ஆகும்.

(6) ஒரு பூச்சிய அணியின் அளவை 0 (சுழி) என்று எடுத்துக்கொள்வது மரபு.

(7) $r(A^T) = r(A)$.

§ 5·1-லிருந்து $|A^T| = |A|$ என்பதால் $r(A^T) = r(A)$

§ **28.** அணி அளவைக்கான வரைவிலக்கணத்தைப் பயன் படுத்தி ஓர் அணியின் அளவைக் காண முற்படும்போது பல சிற்றணி கோவைகளின் மதிப்புகளைக் கணக்கீடு செய்யவேண்டி யிருக்கும். ஆகவே, இந்த முறை அத்துணை எளிதல்ல. எளிய முறையில் அளவையைக் காண விழையும்போது கீழ்வரும் "அணியின் சிறப்புப் பண்பு"களை அறிந்து கொள்வது இன்றிய மையாததாகிறது.

§ **29.** முதனிலை மாற்றங்கள் (Elementary transformations)

பின்வரும் செய்கைகள் (operations), முதனிலை மாற்றங்கள் (Elementary transformations) என்ற பெயரால் வழங்கப்படும்.

(1) இரண்டு நிரைகளை (நிரல்களை) மாற்றியமைத்தல்.

(2) ஒரு நிரையின் (நிரலின்) எல்லா மூலகங்களையும் சுழி யல்லாத (non-zero) மாரு எண்ணியால் (constant scalar) பெருக்கி அமைத்தல்.

(3) ஒரு நிரையின் (நிரலின்) எல்லா மூலகங்களையும் ஒரு மாரு எண்ணியால் பெருக்கி வந்ததை மற்ற ஒரு நிரையின் (நிரலின்) ஒத்த மூலகங்களோடு கூட்டியமைத்தல்.

மேற் கூறிய செய்கைகள் நிரைகளுக்கும் நிரல்களுக்கும் தனித்தனியே பொருந்தும் என்பதை விளக்கும் பொருட்டு இவ்வாறு சுருக்கமாக எழுதப்பட்டுள்ளது என்று அறிக. இப்படிச் சுருக்க முறையில் எழுதுவது பின்வரும் துணையதிகாரங்களிலும் பயன்படுத்தப்படும்.

§ **29·1.** குறியீடு

மேற் கூறிய முதனிலை மாற்றங்களைக் கீழ்க் காணும் குறியீடு களால் குறிக்கப்படும்.

(i) $R_i \rightleftarrows R_j$: i ஆவது நிரையையும், j ஆவது நிரை யையும் மாற்றியமைத்தல்.

இதேபோல், $C_i \rightleftarrows C_j$: i ஆவது நிரையையும் j ஆவது நிரலையும் மாற்றியமைத்தல்.

(ii) $R_i \to k \,.\, R_i$: i ஆவது நிரையை $k\ (\neq 0)$ என்ற மாரு எண்ணியால் பெருக்கியமைத்தல்.

இதேபோல், $C_i \to k \,.\, C_i$: i ஆவது நிரலை $k\ (\neq 0)$ என்ற மாரு எண்ணியால் பெருக்கியமைத்தல்.

(iii) $R_i \rightarrow R_i + kR_j$: j ஆவது நிரையை k என்ற மாறு எண்ணியால் பெருக்கி i ஆவது நிரையுடன் கூட்டியமைத்தல்.

$C_i \rightarrow C_i + k \cdot C_j$: j ஆவது நிரலை k என்ற மாறு எண்ணியால் பெருக்கி i ஆவது நிரலுடன் கூட்டியமைத்தல்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$ என்ற அணி $R_2 \rightleftarrows R_3$

என்ற செய்கையால் $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$ என்ற வடிவம்

பெறும்.

மேலும், $C_2 \rightarrow kC_2$ என்ற செய்கையால் A என்ற அணி

$$\begin{bmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$ என்ற வடிவம் பெறும்.

$C_1 \rightarrow C_1 + t\,C_3$ என்ற செய்கையால் A ஆனது

$$\begin{bmatrix} a_{11} + t\,a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + t\,a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + t\,a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$ என்ற வடிவம் பெறும்.

[குறிப்பு: (1) ஓர் அணியின் நிரை (நிரல்) களுக்குள் மட்டும் செய்யப்படும் முதனிலை மாற்றங்களை நிரை (நிரல்) முதனிலை மாற்றங்கள் என வழங்குவர்.

(2) மேற்கூறிய ஒவ்வொரு முதனிலை மாற்றத்தாலும் புதியதும் வேறுபட்டதுமான அணிகள் கிடைக்கின்றன என அறிய வேண்டும். இந்த வேறுபட்ட அணிகளின் தரம் மாறுவதில்லை என்பது வெளிப்படை. இவற்றின் அளவைகளும் சமமாகும் என்பதைப் பின்னர் காண்போம்.]

§ 30. தேற்றம்

முதனிலை மாற்றங்களினால் ஓர் அணியின் தரமும் அளவையும் மாறுவதில்லை.

முதனிலை மாற்றங்களின் சிறப்புப் பண்பு மேற்கண்ட அடிப்படை முக்கியத்துவம் வாய்ந்த தேற்றத்தில் அடங்கியுள்ளது.

நிறுவல் : A என்ற அணியின் சூழ் மதிப்பில்லாத மிகப்பெரிய அணி கோவையை $|\alpha|$ என்போம். இதன் தரம் r என்றால், A-ன் அளவை r ஆகும்.

இப்போது, A-ன் இரண்டு நிரைகளை மாற்றியமைத்தால் $|\alpha|$-லும் இரண்டு நிரைகள் ஒன்றுக்கொன்று மாறலாம். அப்போது அந்த அணி கோவையின் தனிப்பெறுமானம் (absolute value) மாறாமல் குறிமாத்திரம் (sign only) மாறும் (§5). அதாவது, அந்த அணி கோவையின் தரம் மாறாது. எனவே, செய்கை § 29(1)ஆல் கொடுத்துள்ள அணி A-ன் அளவை மாறாது.

மேலும், A-ல் உள்ள ஒரு நிரையின் எல்லா மூலகங்களையும் k என்ற மாறா எண்ணியால் பெருக்கும்போது $|\alpha|$-ன் ஒரு நிரையின் எல்லா மூலகங்களும் k ஆல் பெருக்கப்படலாம். அப்போது அதன் மதிப்பு $k|\alpha|$ ஆகுமேயொழிய அதன் தரம் மாறாது. அதாவது, செய்கை § 29 (2) ஆல் A-ன் அளவை மாறாது.

இறுதியாக, $R_i \to R_i + kR_j$ என்ற செய்கையால் $|\alpha|$-ன் மதிப்பு மாறாது; அதன் தரமும் மாறாது. எனவே, செய்கை § 29(3) ஆல் A-ன் அளவையும் மாறாது.

மேற்கூறிய விளக்கம் முழுமையாக நிரல் முதனிலை மாற்றங்களுக்கும் பொருந்தும்.

§ 31. சமான அணிகள் (Equivalent Matrices)

A என்னும் அணியில், நிரை அல்லது நிரல் அல்லது இரண்டுங்கலந்த மாற்றங்களைத் தொடர்ந்து செயல் படுத்தி B என்னும் அணி கிடைக்கப் பெற்றால், B ஐ A-ன் சமான அணி (Equivalent Matrix) என்று கூறுவர். B என்ற அணியில்,

மேற்கூறிய முறையில் முதனிலை மாற்றங்களைத் தொடர்ந்து செயல் படுத்தி A என்ற சமான அணி பெற இயலுமல்லவா ? எனவே, A, B-க்களைச் சமான அணிகள் எனலாம். இச் சமான தொடர்பு (Equivalence relation), $\sim$ என்ற குறியீட்டால் குறிக்கப்படும்.

$A \sim B$, மற்றும் $B \sim C$ எனில், $A \sim C$ என எளிதில் அறியலாம்.

அணி A-ல் நிரை (நிரல்) முதனிலை மாற்றங்களை மட்டும் தொடர்ந்து செயல்படுத்தி B என்ற அணி கிடைக்கப் பெற்றால், B ஐ A-ன் நிரை (நிரல்) சமான அணி [row (column) equivalent matrix] என்பர்.

முதனிலை மாற்றங்களால் ஓர் அணியின் அளவையும் தரமும் மாரு என § 30-ல் கண்டோமல்லவா ? எனவே, சமான அணிகள் சம அளவை அணிகளாகும். மறுதலையாக சம அளவை அணி களெல்லாம் சமான அணிகளாகும் என்பது கருதத்தக்கது.

§ 32. தேற்றம்

நிரை அல்லது நிரல் அல்லது இரண்டும் கலந்த முதனிலை மாற்றங்களைச் செயல்படுத்தி, கொடுத்துள்ள ஓர் அணியைச் சம அளவை மேல் முக்கோண அணி (upper triangular matrix) யாக மாற்ற முடியும்.

இந்தத் தேற்றத்தின் நிறுவலை மாணவர்கள் பயிற்சியாக எடுத்துக் கொள்வார்களாக.

மேல் முக்கோண வடிவத்தில் உள்ள எந்த ஓர் அணியின் அளவையையும் பார்த்தவுடனேயே கண்டுகொள்ள முடியும். பின்வரும் மாதிரிக் கணக்குகளைக் கூர்ந்து நோக்கினால் கொடுத் துள்ள அணியை மேல் முக்கோண அணியாக மாற்றியமைத்து அதன் அளவையைக் கணக்கீடு செய்யும் வழிமுறை நன்கு விளங்கும்.

மாதிரிக் கணக்கு :

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & -8 & 0 \end{vmatrix} \text{ என்ற}$$

அணியின் அளவை யாது ?

$R_3 \to R_3 - R_1$; $R_4 \to R_4 + 2R_1$ என்ற செய்கைகளால்,

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

மேலும், $R_3 \to R_3 + R_2$; $R_4 \to R_4 - 2R_2$ என்ற செய்கைகளால்

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

இந்த மேல் முக்கோண அணியின் 3ஆம் தரமுள்ள எந்த சிற்றணி கோவையிலும் ஒரு பூச்சிய நிரை இருக்கும். அதாவது, 3ஆம் தரமுள்ள எல்லாச் சிற்றணி கோவைகளின் மதிப்பும் சுழியாகும்.

ஆனால், $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ என்ற 2ஆம் தர சிற்றணிகோவையின் மதிப்பு $= 2 + 2 = 4 \neq 0$.

$\therefore$ கொடுத்துள்ள அணி A-ன் அளவை $= 2$.

மாதிரிக் கணக்கு **2** :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -3 & -4 \\ 5 & 3 & 3 & 11 \end{bmatrix}$$ என்ற

அணியின் அளவையைக் காண்க.

இஃது ஓர் (4, 3) அணியாகையால், இதன் அளவை $\leqslant 3$,

$R_2 \to R_2 - R_1$; $R_3 \to R_3 - 5R_1$ என்ற செய்கைகளால்,

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & -6 & -10 \\ 0 & 8 & -12 & -19 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & -6 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (R_3 \to R_3 - 2R_2)$$

இந்த மேல் முக்கோண அணியிலிருந்து கிடைக்கப்பெறும் ஒரு

$$3\text{ஆம் தர அணிகோவை} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & -6 & -10 \\ 0 & 0 & 11 \end{vmatrix}$$

இதன் மதிப்பு $= -66 \neq 0$

$\therefore$ கொடுத்துள்ள அணி A-ன் அளவை $= 3$.

§ 33. தேற்றம்

n அளவையுடைய (n, n) தரமுள்ள ஒரு சதுர அணியை (அதாவது, n-தரமுள்ள பூச்சியமில்கோவை சதுர அணியை)

(i) முதனிலை நிரை மாற்றங்களால் மட்டும் அல்லது

(ii) முதனிலை நிரல் மாற்றங்களால் மட்டும் அல்லது

(iii) இரண்டுங் கலந்த முதனிலை மாற்றங்களால் n தரமுள்ள I_n என்ற அலகு அணியாக மாற்றலாம்.

எளிதாக விளக்குவதற்கு (3. 3) தரமுள்ள

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$ என்ற அணியை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$R_1 \rightarrow \frac{1}{a_{11}} \times R_1$ என்ற செய்கையால்

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

இப்போது, $R_2 \rightarrow R_2 - a_{21} \cdot R_1$; $R_3 \rightarrow R_3 - a_{31} \cdot R_1$ என்ற செய்கைகளால்

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$ (இங்கே $r_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}}$ $r_{13} = \frac{a_{13}}{a_{11}}$, $r_{22} = a_{22} - a_{21} \cdot \frac{a_{12}}{a_{11}}$ முதலியன)

மேலும், $R_2 \rightarrow \frac{1}{r_{22}} \cdot R_2$ என்ற செய்கையால்

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ 0 & 1 & s_{23} \\ 0 & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$ (இங்கே $s_{23} = \frac{r_{23}}{r_{22}}$)

$R_3 \rightarrow R_3 - r_{32} \cdot R_2$ என்ற செய்கையால்

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ 0 & 1 & s_{23} \\ 0 & 0 & s_{33} \end{bmatrix}$$ (இங்கே $s_{33} = r_{33} - r_{32} \cdot s_{23}$)

$$\begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ 0 & 1 & s_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ ($R_3 \rightarrow \frac{1}{s_{33}} \cdot R_3$ என்ற செய்கையால்)

இனி, $R_1 \rightarrow R_1 - r_{12} \cdot R_2$ என்ற செய்கையால்

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & s_{13} \\ 0 & 1 & s_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{இங்கே } s_{13} = r_{13} - r_{12} \cdot s_{23})$$

மேலும், $R_1 \rightarrow R_1 - s_{13} \cdot R_3$; $R_2 \rightarrow R_2 - s_{23} \cdot R_3$ என்ற செய்கைகளால்

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

அவ்வாறே முதனிலை நிரல் மாற்றங்களாலும், நிரை நிரல் முதனிலை மாற்றங்களாலும் கொடுத்துள்ள அணியை I ஆக மாற்றலாம்.

§ 33-1. தேற்றம்

நிரைநிரல் இரண்டும் கலந்த முதனிலை மாற்றங்களால் அளவை $r < n$ உடைய (n, n) தரமுள்ள சதுர அணியை

$$I_r, \quad \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix}$$ ஆகிய ஏதாவது

ஒரு வடிவத்தில் மாற்றி யமைக்கலாம்.

மேற்கண்ட வடிவங்களுக்கு இயல்நிலை வடிவங்கள் (**Normal forms**) என்று பெயர்.

[குறிப்பு : கொடுத்துள்ள ஓர் அணியை இயல்நிலை வடிவத்தில் மாற்றியமைத்த பின்னர் அந்த அணியின் அளவையை உடனே அறிந்து கொள்ளலாம்.]

மாதிரிக் கணக்கு 3 :

இயல்நிலை வடிவத்தில் பின்வரும் அணியை மாற்றியமைத்து, அதன் அளவையைக் காண்க.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

இப்போது, $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -4 & -8 \end{bmatrix}$ $(R_2 \to R_2 - 2R_1, \; R_3 \to R_3 - 3R_1)$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \left(R_2 \to -\frac{1}{3} R_2, \; R_3 \to -\frac{1}{4} R_3\right)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (R_3 \to R_3 - R_2)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (R_1 \to R_1 - 2R_2)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (R_1 \to R_1 - R_3)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (R_2 \to R_2 - R_3)$$

$$= I_3$$

$\therefore$ A-ன் அளவை $= 3$

மாதிரிக் கணக்கு **4** :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$ என்ற அணியை

இயல் நிலை வடிவத்திற்கு மாற்றியமைத்து அதன் அளவையைக் காண்க.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (R_2 \to R_2 - R_1, \; R_3 \to R_3 + 2R_1)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (C_2 \to C_2 - 2C_1, \; C_4 \to C_4 + C_1)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 7 & 3 \end{bmatrix} \quad (C_2 \rightleftarrows C_3)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 11 & -7 \end{bmatrix} \quad (R_3 \to R_3 - 2R_2)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & -7 \end{bmatrix} \quad \begin{pmatrix} C_3 \to C_3 + 2C_2, \\ C_4 \to C_2 - 5C_2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-7}{11} \end{bmatrix} \quad \left(C_3 \to \frac{1}{11} \cdot C_3\right)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \left(C_4 \to C_4 + \frac{7}{11} \cdot C_3\right)$$

$$= \begin{bmatrix} I_3 & 0 \end{bmatrix}$$

A-ன் அளவை = 3.

மாதிரிக்கணக்கு **(5)**:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 8 & 13 & 12 \end{bmatrix} \text{ என்ற}$$

அணியின் அளவை யாது?

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 8 & 13 & 12 \end{bmatrix} \quad (R_1 \rightleftarrows R_2)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 8 & 13 & 12 \end{bmatrix} \quad (C_1 \to \tfrac{1}{2} \cdot C_1)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (R_3 \to R_3 - 2R_1)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (C_2 \to C_2 - 3C_1, \\ C_3 \to C_3 - 5C_1, \\ C_4 \to C_4 - 4C_1) \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (C_2 \to \frac{1}{2} \cdot C_2, \\ C_3 \to \frac{1}{3} \cdot C_3 \\ C_4 \to \frac{1}{4} \cdot C_4). \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (R_3 \to R_3 - R_2)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{pmatrix} C_3 \to C_3 - C_2, \\ C_4 \to C_4 - C_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ A-ன் அளவை $= 2$.

பயிற்சி 4—(a).

1. கீழ்க்கண்ட அணிகளின் அளவைகளைக் காண்க :

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \\ -6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(6) $\begin{bmatrix} 1 & 1+i & -ii \\ 0 & i & 1+2i \\ 1 & 1+2i & 1+i \end{bmatrix}$

(7) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ (8) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

(9) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 10 \end{bmatrix}$ (10) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$

(11) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

பின்வரும் (12), (13) கணக்குகளில் A, B, $A+B$, AB, BA ஆகிய அணிகளின் அளவைகளைக் கணக்கிடுக.

(12) $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 13 & 10 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

(13) $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

(14) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 2 & 2 & 8 \\ -3 & -6 & -9 \end{bmatrix}$ (15) $\begin{bmatrix} 3 & 11 & 1 & 5 \\ 5 & 13 & -1 & 11 \\ 2 & 2 & 4 & -8 \end{bmatrix}$

(16) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 8 & 1 & 9 & 7 \end{bmatrix}$ (17) $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 14 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

(18) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. (19) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 2 & 4 & 8 \\ -3 & -6 & -9 \end{bmatrix}$

(20) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -3 & -4 \\ 5 & 3 & 3 & 11 \end{bmatrix}$ (21) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -4 & 7 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

[M. Sc. '69]

(22) $\begin{bmatrix} 1 & -7 & 3 & -3 \\ 7 & 20 & -2 & 25 \\ 5 & -2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ (23) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

[B. Tech '71, '73].

(24) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ (25) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

[B. Tech, '70]

(26) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ (27) $\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 8 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

(28) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}$ (29) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

[B. Tech '72]

(30) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (31) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}$

(32) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -6 \end{bmatrix}$

(33) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \end{bmatrix}$

(34) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 4 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

(35) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 9 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 9 \\ 3 & 1 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$

II. கீழ்வரும் அணிகளை மேல் முக்கோண அணிகளாக மாற்றுக. அவற்றின் அளவைகளையும் காண்க.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 1+i & -i \\ 0 & i & 1+2i \\ 1 & 1+2i & 1+i \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 5 \end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 9 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ (6) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

III. பின் வரும் அணிகளை இயல்நிலை அணிகளாக மாற்றுக அவற்றின் அளவைகளைக் காண்க.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 14 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -8 \end{bmatrix}$ (6) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix}$

(7) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ (8) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(9) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 13 & 12 \end{bmatrix}$ (10) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

(11) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

விடைகள்

I. (1) 2 ; (2) 1 ; (3) 2 ; (4) 3 ; (5) 2 ; (6) 2 ; (7) 3 ; (8) 3 ; (9) 2 ; (10) 1 ; (11) 3 ; (12) 2, 2, 3, 1, 1 (13) 1, 2, 2, 1, 0 (14) 2 ; (15) 2 ; (16) 3 ; (17) 3 ; (18) 3 ; (19) 2 ; (20) 3 ; (21) 2 ; (22) 2 ; (23) 2 ; (24) 3 ; (25) 3 ; (26) 3 ; (27) 4 ; (28) 3 ; (29) 4 ; (30) 1 ; (31) 3 ; (32) 4 ; (33) 2 ; (34) 5 ; (35) 5.

II. (1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, அளவை 3

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1+2i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, அளவை 2

(3) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, அளவை 2

(4) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, அளவை 3

(5) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, அளவை 2

(6) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, அளவை 4

III. (1) $\begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; அளவை 2 (2) I_3; அளவை 3

(3) $[I_3 \quad 0]$; அளவை 3

(4) $\begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; அளவை 3 (5) $[I_3 \; 0]$; அளவை 3

(6) $\begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; அளவை 2 (7) $[I_3 \; O]$; அளவை 3

(8) $\begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; அளவை 3

(9) $\begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; அளவை 2 (10) $[I_3 \; O]$; அளவை 3

(11) $\begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; அளவை 3

§34. தேற்றம்

AB என்ற பெருக்கிய அணியில் செய்யப்படும் நிரை (நிரல்) முதனிலை மாற்றமானது, அதே நிரை (நிரல்) முதனிலை மாற்றம் முன்காரணி A (பின் காரணி B)-ல் மட்டும் செய்யப்படுவதற்குச் சமானமாகும் (equivalent).

நிறுவல் :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

என்ற இரு அணிகளை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$R_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{bmatrix}$$ என்றால்,

$$A = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}$$ என எழுதலாம்.

$$\therefore \quad AB = \begin{bmatrix} R_1C_1 & R_1C_2 \\ R_2C_1 & R_2C_2 \end{bmatrix}$$ ஆகும்.

வலப் பக்கத்திலுள்ள அணியின் அமைப்பிலிருந்து (structure), AB-ல் செய்யப்படும் நிரை முதனிலை மாற்றமானது, R_1, R_2 ஆகிய காரணிகளை மாத்திரம் மாற்றுவதற்குச் சமானமாகும். அதாவது, A-ல் செய்யப்படும் அதே நிரை முதனிலை மாற்றத்திற்குச் சமானமாகும் என்பது தெளிவாகிறது.

இதேபோல், AB-ல் செய்யப்படும் நிரல் முதனிலை மாற்றமானது B-ல் செய்யப்படும் அதே நிரல் முதனிலை மாற்றத்திற்குச் சமானமாகும்.

இதனால் தேற்றத்தின் நிறுவல் முற்றுப் பெறுகிறது.

§ 34-1. முதனிலை அணிகள் (Elementary Matrices)

ஓர் அலகு அணியில் (மூன்று முதனிலை மாற்றங்களில்) ஏதாவதொரு முதனிலை மாற்றத்தைச் செயல்படுத்திக் கிடைக்கப் பெறும் ஓர் அணிக்கு முதனிலை அணி (Elementary Matrix) என்று பெயர். ஒரு முதனிலை அணியை E-அணி என்று குறிப்பது வழக்கம்.

ஓர் அலகு அணியில் நிரை (நிரல்) முதனிலை மாற்றத்தை மட்டும் செயல்படுத்திக் கிடைக்கப்பெறும் அணியை நிரை (நிரல்) முதனிலை அணி என்று கூறுவர்.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ என்னும் அலகு அணியில்

(1) $R_2 \rightleftarrows R_3$ அல்லது $C_2 \rightleftarrows C_3$ என்ற செய்கையால்

$$E(R_2 \rightleftarrows R_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = E(C_2 \rightleftarrows C_3)$$

என்ற அணியும்,

(2) $R_3 \to k\,R_3$ அல்லது $C_3 \to k\,C_3$ என்ற செய்கையால்

$$E(R_3 \to k\,R_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} = E(C_3 \to k\,C_3)$$

என்ற அணியும்,

(3) $R_1 \to R_1 + kR_2$ அல்லது $C_2 \to C_2 + kC_1$ என்ற செய்கையால்

$$E(R_1 \to R_1 + kR_2) = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= E(C_2 \to C_2 + kC_1)$$

என்ற அணியும் கிடைக்கின்றன. இவை யாவும் முதனிலை அணிகளேயாகும்.

[குறிப்பு: ஒவ்வொரு முதனிலை அணியும் பூச்சியமில் கோவை அணியாகும். (ஏன் ?)]

§34-2. தேற்றம்

A என்னும் (m, n) அணியில் நிரை (நிரல்) முதனிலை மாற்றத்தைச் செயல்படுத்துவது, அதே நிரை (நிரல்) மாற்றத்தை I_m-ல் (I_n-ல்) செயல்படுத்திக் கிடைக்கும் நிரை (நிரல்) முதனிலை அணியை முன் காரணி (பின் காரணி) யாகக் கொண்டு, A-யுடன் பெருக்குவதற்குச் சமமாகும்.

நிறுவல் : $\rho(\sigma)$ என்பது ஒரு நிரை (நிரல்) முதனிலைச் செய்கையைக் குறிப்பதாகக் கொள்வோம். அதே நிரை (நிரல்) முதனிலை மாற்றத்தை I_m-ல் (I_n-ல்) செயல்படுத்திக் கிடைக்கப் பெறும் முதனிலை அணியை E_ρ (E_σ) எனக் குறிப்போம்.

$$\begin{aligned} \rho(A) &= \rho(IA) \\ &= (\rho I)A \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (\S 34) \\ &= E_\rho A. \end{aligned}$$

இவ்வாறே,
$$\begin{aligned} \sigma(A) &= \sigma(AI) \\ &= A(\sigma I) \quad (\S 34) \\ &= A E\sigma \end{aligned}$$

§ 34-3. கிளைத்தேற்றம்

$H_1, H_2, \ldots\ldots H_r$ என்பவை r நிரை முதனிலை மாற்றங்களையும், $K_1, K_2, \ldots K_s$ என்பவை s நிரல் மாற்றங்களையும் குறிப்பதாக் கொள்வோம்.

$H_1, H_2, \ldots H_r$ நிரை முதனிலை மாற்றங்களை இவ்வரிசையில் முதலில் அணி A-ல் செயல்படுத்திய பின்னர் $K_1, K_2,$ K_s என்ற நிரல் முதனிலை மாற்றங்களை இவ்வரிசையில் செயல் படுத்திக் கிடைக்கும் சமான (அல்லது சம அளவை) அணி B எனில்,

$$B = H_r H_{r-1}, \ldots H_2 H_1 A K_1 K_2 \ldots K_s$$

$H_r = H_{rr}, \ldots H_2.$ H_r என்னும் r அணிகளை இவ் வரிசையில் பெருக்கி வந்த அணியை P என்னும், $K_1, K_2, \ldots K_s$ என்னும் s அணிகளை இவ் வரிசையில் பெருக்கி வந்த அணியை Q என்றும் குறித்தால்,

$$B = PAQ$$

என எழுதலாம்.

எனவே, P, Q என்னும் பூச்சியமில்கோவை அணிகள் $B = PAQ$ என்ற சமன்பாட்டுக்குப் பொருந்துமாறு காணப்பெறின் A-ம், B-ம் சமான அணிகள் என வரைவிலக்கணம் செய்வதுமுண்டு.

§ 35-1. பூச்சியமில்கோவை அணியின் நேரெதிர் அணி காணல்— இரண்டாவது முறை

கொடுத்துள்ள பூச்சியமில் கோவை அணி A ஐ

$$A = IA \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

என்று எழுதலாம்.

§34-ல் விளக்கியபடி (1)-ல் உள்ள இடப்பக்கத்து A-ல் நிரை முதனிலை மாற்றங்கள் செய்வதானது, வலப்பக்கத்து IA-ல் உள்ள முன்காரணி I-ல் மாத்திரம் அதே நிரை முதனிலை மாற்றங்கள் செய்வதற்குச் சமானமாகும்.

மேலும், A பூச்சியக்கோவை அணியாதலால், நிரை முதனிலை மாற்றங்கள் மாத்திரம் செய்து அதை அலகு அணி I ஆக மாற்றலாம். (§33)

எனவே (1)-ல், இடப்பக்கத்திலும், வலப்பக்கத்து முன்காரணி I-லும் ஒரேவிதமான நிரை முதனிலை மாற்றங்கள், இடப்பக்கத்து A என்ற அணி I ஆகும் வரை தொடர்ந்து செய்க. அப்போது வலப்பக்கத்து I என்ற அலகு அணி B என்ற அணியாக மாறியது எனக் கொள்வோம். அப்போது சமன்பாடு (1)

$$I = BA \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

என்று மாறும். சமன்பாடு (2)-லிருந்து $\underline{B = A^{-1}}$ என்பது தெளிவாகிறது.

[குறிப்பு (1): $A = AI$ என எழுத்தி, இடப்பக்கத்து A-லும் வலப்பக்கத்து I-லும் ஒரேவீதமான நிரல் முதனிலை மாற்றங்களை இடப்பக்கத்து A என்ற அணி I ஆகும் வரை தொடர்ந்து செய்து, $I = AC$ எனக் கிடைக்கப்பெற்றால், $C = A^{-1}$ ஆகும்.]

(2) மேலே விளக்கிய இருவிதமான முதனிலை மாற்றங்களில் ஏதாவது ஒன்றையே மேற்கொள்ளவேண்டும். இரண்டு முதனிலை மாற்றங்களையும் கலந்து மேற்கொள்ளளக்கூடாது என்பதை நினைவில் கொள்ளவேண்டும்.

(3) கொடுத்துள்ள n-தரமுள்ள A என்ற அணி பூச்சிய கோவை அணி என்ருல், $A = I\,A$ என எழுதி மேற்கூறிய நிரை முதனிலை மாற்றங்கள் செய்யும்போது $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = BA \; (r < n)$

என்று கிடைக்கும். இதிலிருந்து A-க்கு நேரெதிர் அணி இல்லை என்று புலனுகிறது.

(4) § 22·1-ல் விளக்கிய முறையில், 3ஆம் தரம் வரை உள்ள அணிகளின் நேரெதிர் அணிகள் காண்பது எளிது. அதற்கு மேற்பட்ட தரமுள்ள அணிகளுக்கு அம் முறை அத் துணை எளிதல்ல. ஆனுல் இப்போது விளக்கிய முறை எந்த அணிக்கும் ஏற்றதாகும்.

மாதிரிக்கணக்கு (6)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$ என்ற அணியின்

நேரெதிர் அணி காண்க.

$$A = I_3\,A = I\,A$$

அதாவது. $$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times A$$

$R_2 \to R_2 - R_1$; $R_3 \to R_3 - R_1$ என்ற செய்கைகளால்

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times A$$

மேலும், $R_1 \to R_1 - 3R_2$ என்ற செய்கையால்

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times A$$

$R_1 \to R_1 - 3R_3$ என்ற செய்கையால்,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times A$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

மாதிரிக்கணக்கு (7)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ என்ற அணியின்

நேரெதிர் அணி காண்க.

கொடுத்துள்ள அணியை A என்போம்.

$\therefore \quad A = AI$

அதாவது,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = A \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$C_2 \to C_2 - 2C_1$; $C_3 \to C_3 - 3C_1$; $C_4 \to C_4 - C_1$ என்ற செய்கைகளால் மேற்கண்ட சமன்பாடு பின்வருமாறு மாறும்:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} = A \times \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$C_4 \to C_4 - C_2$; $C \to C_1 - C_2$ என்ற செய்கைகளால்

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = A \times \begin{bmatrix} 3 & -2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$C_3 \to C_3 + 2C_4$; $C_1 \to C_1 - 2C_4$ என்ற செய்கைகளால்

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A \times \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$C_4 \to C_4 + C_3$ என்ற செய்கையால்

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A \times \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

இறுதியாக, $C_2 \to C_2 + C_4$; $C_3 \to -C_3$ என்ற செய்கைகளால்

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A \times \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

§ 35-2. பூச்சியமில்கோவை அணியின் நேர் எதிர் அணி காணல்—மூன்றாவது முறை (கற்பித அணிச் சமன் பாட்டு முறை) (Hypothetical Matrix equation method)

இம் முறை கீழ்வரும் மாதிரிக் கணக்கு (8) மூலம் நன்கு விளங்கும்.

மாதிரிக் கணக்கு (8)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$ என்ற

அணியின் நேரெதிர் அணி காண்க.

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$ என்ற

இரண்டு நிரல் அணிகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$AX = B$ என்ற அணிச்சமன்பாட்டை பிரித்தெழுதினால்

$$4x - 2y - z = b_1 \qquad \ldots \quad (1)$$

$$x + y - z = b_2 \qquad \ldots \quad (2)$$

$$-x + 2y + 4z = b_3 \qquad \ldots \quad (3)$$

என்ற மூன்று ஒருங்கைச் சமன்பாடுகள் கிடைக்கும்.

இவற்றிலிருந்து x, y, z-களின் மதிப்புகளை b_1, b_2, b_3 ஆகியவற்றின் உறுப்புகளாகக் கணக்கீடு செய்யலாம். அப்படிச் செய்தால்,

$$x = \frac{1}{9}(2b_1 + 2b_2 + 2b_3) \qquad \ldots \quad (4)$$

$$y = \frac{1}{9}(-b_1 + 5b_2 + b_3) \qquad \ldots \quad (5)$$

$$z = \frac{1}{9}(b_1 - 2b_2 + 2b_3) \qquad \ldots \quad (6)$$

(4), (5), (6) ஆகிய மூன்று சமன்பாடுகளையும் ஒருங்கிணைத்து

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

அல்லது, $X = CB$

என்ற அணிச் சமன்பாடாக எழுதலாம்.

இப்போது $AX = B$

$$X = CB$$

என்ற இரு அணிச்சமன்பாடுகளை ஒப்பிட்டு நோக்கினால்

$$C = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} = A^{-1}$$

என்பது தெளிவாக விளங்கும்.

பயிற்சி—4 (b)

முதனிலை மாற்றங்களைப் பயன்படுத்தியும், கற்பித அணிச் சமன்பாட்டு முறையைப் பயன்படுத்தியும் பின்வரும் அணிகளின் நேரெதிர் அணிகளைக் காண்க.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 7 & 6 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 8 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & -6 & -7 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

(6) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ (7) $\begin{bmatrix} -4 & -5 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

(8) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 14 & 14 \end{bmatrix}$ (9) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(10) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

(11) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

விடைகள்

(1) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 3 & 1 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(3) $\frac{1}{130}\begin{bmatrix} 4 & -42 & 20 \\ 20 & 50 & -30 \\ -9 & -3 & -20 \end{bmatrix}$

(4) $\frac{1}{20}\begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 21 & -7 & -8 \\ -18 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

(5) $\frac{1}{25}\begin{bmatrix} 9 & 19 & -4 \\ 4 & 14 & 1 \\ 8 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

(6) $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

(7) $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{59}{3} & -9 \\ \frac{1}{3} & \frac{40}{3} & -6 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

(8) $\begin{bmatrix} -23 & 29 & \frac{-64}{5} & \frac{-18}{5} \\ 10 & -12 & \frac{26}{5} & \frac{7}{5} \\ 1 & -2 & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} \\ 1 & -2 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

(9) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(10) $\frac{1}{18}\begin{bmatrix} 2 & 5 & -7 & 1 \\ 5 & -1 & 5 & -2 \\ -7 & 5 & 11 & 10 \\ 1 & -2 & 10 & 5 \end{bmatrix}$

(11) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{bmatrix}$

5. வெக்டர்கள்

(VECTORS)

§ **36.** இயற்பியலில் வெக்டர் என்பது பெருமானமும் திசையும் (magnitude and direction) உடைய ஒரு கணியம் என்று விளக்கப்படுவதை நாம் அறிவோம். A என்ற வெக்டர் கணியத்தை x, y, z அச்சுத் திசைகளில் a_x, a_y, a_z என்ற வெக்டர் கூறுகளாக (components) எழுதலாம். V என்ற திசைவேகத்தை (vclocity) v_x, v_y, v_z என்ற கூறுகளாகவும், F என்ற விசையை (force) f_x, f_y, f_z என்ற கூறுகளாகவும் எழுதுவது நாம் நன்கு அறிந்ததே.

மேற்கூறிய $\boldsymbol{F}$ என்ற விசையை முப்பரிமாண வெளி (three dimensional space)யில் f_x, f_y, f_z என்ற மூன்று கூறுகளாகப் பிரித்தெழுதுவதுபோல், நாற்பரிமாண வெளி (four dimensional space)யில் அதை f_1, f_2, f_3, f_4 என்ற நான்கு கூறுகளாகப் பிரித்து அமைக்கலாம். இதேபோல் n-பரிமாண வெளியில் அதை $f_1, f_2, \ldots f_n$ என்ற n-கூறுகளாகப் பிரிக்கலாம்.

n-பரிமாணவெளி என்ற ஒன்று உண்மையில் உண்டா என்ற கேள்வியை எழுப்பிக் குழப்பிக்கொள்ளவேண்டிய அவசியமில்லை. n-பரிமாண வெளி என்பது, உண்மையில் நாம் காணும் முப்பரிமாண வெளியின் அருவமான விரிவே (only abstract extension) அன்றி வேறல்ல. இம்மாதிரி அருவநிலை தத்துவங்களிலிருந்து மிக்க பயனுள்ள விளைவுகளைப் பெறுவதால் இவை உயர் கணிதத்தில் வழக்கமாக மேற்கொள்ளப்படுகின்றன.

வரைவிலக்கணம் : வரிசைப்படுத்திய $x_1, x_2, \ldots x_n$ என்னும் n-கணியங்களை (crdered set of n quantities) ஒரு n-பரிமாண வெக்டர் x-ன் n கூறுகள் என்பர். சுருக்கமாக, $x_1, x_2, \ldots x_n$ ஆகிய n-கணியங்களின் தொகுதியை ஒரு n-வெக்டர் என்றும் கூறுவது உண்டு.

இதை

$X \;:\; (x_1, x_2 \ldots x_n)$ அல்லது

$X = [x_1, x_2 \ldots x_n]$ அல்லது

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ என்று சூழ்நிலைக்கேற்றாற்போல்

எழுதுவதுண்டு. எனவே, ஒரு வெக்டர் என்பது ஒரு நிரை அல்லது நிரல் அணி என்பது தெளிவாகிறதல்லா?

[குறிப்பு: சுழிவெக்டர் அல்லது பூச்சிய வெக்டர் என்றால் அந்த வெக்டரின் கூறுகள் எல்லாமே சுழி என்று கொள்ள வேண்டும்.]

§ 36·1 இரு வெக்டர்களின் கூட்டல், கழித்தல்

X, Y ஆகிய இரண்டு சம பரிமாணமுள்ள வெக்டர்களின் கூறுகள் முறையே $x_1, x_2, \ldots x_n$; $y_1, y_2, \ldots y_n$ என்றால்

$$X = [x_1, x_2, \ldots x_n];\; Y = [y_1, y_2, \ldots y_n]$$

$$\therefore\; X \pm Y = [x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, \ldots x_n \pm y_n]$$

§ 36·2 ஒரு வெக்டரை k என்ற மாறா எண்ணியால் (Constant scalar) பெருக்கல்

$X = [x_1, x_2, \ldots x_n]$ என்றால்

$k\,X = [kx_1, kx_2, \ldots kx_n]$ ஆகும்.

§ 37. ஒருபடித் தொடர்பிலா வெக்டர்கள் (Linearly Independent Vectors)

$X_1, X_2 \ldots X_m$ என்பவை m வேறுபட்ட (distinct) ஆனால் அதே பரிமாணம் (same dimension) உள்ள வெக்டர்களைக் குறிக்கட்டும்.

$$k_1 X_1 + k_2 X_2 + \ldots \ldots + k_m X_m = 0 \qquad \ldots (1)$$

என்ற சமன்பாடு சமனடைவதற்கு, $k_1, k_2, \ldots k_m$ ஆகிய எல்லா எண்ணிகளுக்கும் சுழி (zero) தவிர வேறு மதிப்புகள் இருக்க முடியாதென்றால் (அதாவது $k_1 = k_2 = k_3 = \ldots = 0$), $X_1, X_2, \ldots$

X_m ஆகிய வெக்டர்களை ஒருபடித் தொடர்பிலா (linearly independent) வெக்டர்கள் என்பர்.

ஆனல், அந்த $k_1, k_2, \ldots k_m$ ஆகியவற்றில் குறைந்தது ஓர் எண்ணிக்கைக்காவது சுழியல்லாத வேறு மதிப்பு இருக்கமுடியும் என்ருல், $X_1, X_2, \ldots X_m$ ஆகிய வெக்டர்களுக்கு ஒருபடித் தொடர்புடைய (linearly dependent) வெக்டர்கள் என்று பெயர்.

§ 37·1 ஒருபடித் தொடர்புடைய m வெக்டர்களில் ஏதாவதொரு வெக்டரை மற்ற வெக்டர்களின் ஒருபடிச் சேர்மானமாக (linear combination) எழுதலாம்.

X_1, X_2, X_m என்பவை ஒருபடித் தொடர்புடைய வெக்டர்கள் என்ருல், சமன்பாடு (1) (§ 37)-ல் $k_1, k_2, \ldots k_m$-களில் ஏதாவது ஒன்றின் மதிப்பாவது சுழியல்லாமல் இருக்கவேண்டும். எடுத்துக் காட்டாக $k_r \neq 0$ என்ருல் சமன்பாடு (1) ஐப் பின்வருமாறு எழுதலாம்:

$$X_r = -\frac{1}{k_r}\{k_1 X_1 + k_2 X_2 + \ldots + k_{r-1}X_{r-1} + k_{r+1} X_{r+1} + \ldots + k_m X_m\}$$

$$= \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_{r-1} X_{r-1} + \lambda_{r+1} X_{r+1} + \ldots + \lambda_m X_m \quad \ldots \quad (2)$$

சமன்பாடு (2)-லிருந்து X_r என்ற வெக்டர் மற்ற வெக்டர்களின் ஒருபடிச் சேர்மானமாக அமைக்கப்பட்டுள்ளது என்பது தெளிவாகிறது. இங்கே $\lambda_s = -k_s/k_r$ என்பவை எண்ணிகள்.

மாதிரிக்கணக்கு (1)

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1, & 2, & 3 \end{bmatrix}, \; X_2 = \begin{bmatrix} 2, & -1, & 3 \end{bmatrix},$$

$X_3 = \begin{bmatrix} 0, & 1, & -1 \end{bmatrix}$ ஆகிய முப்பரிமாணமுள்ள மூன்று வெக்டர்கள் ஒருபடித் தொடர்பிலாதவை என நிறுவுக.

$k_1 X_1 + k_2 X_2 + k_3 X_3 = 0$ எனில்,

$$k_1 \begin{bmatrix} 1, & 2, & 3 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 2, & -1, & 3 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 0, & 1, & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \; k_1 + 2k_2 \qquad = 0$$
$$2\,k_1 - \; k_2 + k_3 = 0$$
$$3\,k_1 + 3\,k_2 - k_3 = 0$$

இவற்றின் தீர்வு : $k_1 = 0 = k_2 = k_3$. எனவே X_1, X_2, X_3 ஆகிய மூன்று வெக்டர்கள் ஒருபடித் தொடர்பிலாதவை.

மாற்றுமுறை :

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1, & 2, & 3 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 2, & -1, & 3 \end{bmatrix},$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 0, & 1, & -1 \end{bmatrix}$$

இப்போது, முதல் மூலகம் 0 ஆகும்படி X_1, X_2-களை இணைத்தால்

$$X_2 - 2\,X_1 = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -3 \end{bmatrix} \qquad \ldots \; (1)$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \ldots \; (2)$$

இரண்டாவது மூலகமும் 0 ஆகும்படி (1), (2)-களை இணைத்தால்

$$X_2 - 2\,X_1 + 5\,X_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

இனி, எந்தவிதமான ஒருபடிச் சேர்மானத்திலும் மூன்றுவது மூலகத்தையும் 0 ஆக்கமுடியாது.

எனவே X_1, X_2, X_3 ஆகிய மூன்று வெக்டர்கள் ஒருபடித் தொடர்பிலாதவை.

மாதிரிக்கணக்கு (2)

மாதிரிக்கணக்கு (1)-ல் உள்ள X_1, X_2, X_3 ஆகிய மூன் வெக்டர்களுடன் நான்காவது வெக்டர் $X_4 = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ ஐப் சேர்த்து X_1, X_2, X_3, X_4 ஆகிய நான்கு வெக்டர்கள் ஒருபடி தொடர்புடையன என நிறுவுக.

$k_1 X_1 + k_2 X_2 + k_3 X_3 + k_4 X_4 = 0$ எனில்

$$k_1 \begin{bmatrix} 1, & 2, & 3 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 2, & -1, & 3 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 0, & 1, & -1 \end{bmatrix} + k_4 \begin{bmatrix} 4, & -1, & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad k_1 + 2k_2 \qquad + 4k_4 = 0 \quad \ldots \quad (1)$$

$$2k_1 - k_2 + k_3 - k_4 = 0 \quad \ldots \quad (2)$$

$$3k_1 + 3k_2 - k_3 + 5k_4 = 0 \quad \ldots \quad (3)$$

$$(2) + (3): \quad 5k_1 + 2k_2 \qquad + 4k_4 = 0 \quad \ldots \quad (4)$$

$$(4) - (1): \quad 4k_1 \qquad = 0$$

$$\therefore \quad k_1 = 0$$

$$\therefore \quad 2k_2 = -4k_4$$

அல்லது $k_2 = -2k_4$

(2)-லிருந்து $k_3 = -k_4$

எனவே, $k_1 = 0, \; k_2 = -2\lambda, \; k_3 = -\lambda, \; k_4 = \lambda$
(இங்கே λ என்பது ஏதாவது ஓர் எண்ணி)

$\lambda = 1$ எனப் பிரதியிட்டால்

$$k_1 = 0, \; k_2 = -2, \; k_3 = -1, \; k_4 = 1$$

$$\therefore \quad 0 \cdot X_1 - 2X_2 - X_3 + X_4 = 0$$

எனவே, X_1, X_2, X_3, X_4 ஆகிய வெக்டர்கள் ஒருபடித் தொடர்புடையவை ஆகும்.

மாற்று வழி :

முதல் மூலகம் 0 ஆகும்படி X_1, X_2-களை இணைத்தால்

$$X_2 - 2X_1 = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -3 \end{bmatrix} \quad \ldots \quad (5)$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \ldots \quad (6)$$

முதல் மூலகம் 0 ஆகும்படி X_2, X_4-களை இணைத்தால்

$$2X_2 - X_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \ldots \quad (7)$$

இரண்டாவது மூலகமும் 0 ஆகும்படி (5), (6), (7)-களை இணைத்தால்

$$2X_2 + X_3 - X_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

அதாவது, $0 \cdot X_1 + 2X_2 + X_3 - X_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

எனவே X_1, X_2, X_3, X_4 ஆகிய நான்கு வெக்டர்களும் ஒருபடித் தொடர்புடையன.

மாதிரிக்கணக்கு (3)

$$X_1 = \begin{bmatrix} 2, & 1, & -2, & -1 \end{bmatrix},$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1, & -1, & -1, & -3 \end{bmatrix},$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 7, & 2, & -7, & 4 \end{bmatrix}$$

ஆகிய வெக்டர்கள் ஒருபடித் தொடர்பிலாதவை என்று காண்பிக்கவும்.

$k_1X_1 + k_2X_2 + k_3X_3 = 0$ என்போம்.

$$\therefore \quad 2k_1 + k_2 + 7k_3 = 0 \quad \ldots \quad (1)$$

$$k_1 - k_2 + 2k_3 = 0 \quad \ldots \quad (2)$$

$$-2k_1 - k_2 - 7k_3 = 0 \quad \ldots \quad (3)$$

$$-k_1 + 3k_2 + 4k_3 = 0 \quad \ldots \quad (4)$$

இவற்றில் (1)-ம், (3)-ம் ஒரே சமன்பாடு. எனவே, (1), (2), (4) ஆகியவற்றின் தீர்வு காண்போம்,

(2) + (4) : $\quad 2k_2 + 6k_3 = 0$

அதாவது, $\quad k_2 + 3k_3 = 0 \quad \ldots \quad (5)$

(1) + 2×(4) : $\quad 7k_2 + 15k_3 = 0 \quad \ldots \quad (6)$

$(6) - 7 \times (5):$ $\quad -6k_3 = 0$

$\therefore \quad k_3 = 0$

(5)-லிருந்து $\quad k_2 = 0$

$\therefore \quad k_1 = 0$

எனவே, X_1, X_2, X_3 என்ற மூன்று நாற்பரிமாண வெக்டர்கள் ஒருபடித் தொடர்பில்லாதவை.

மாதிரிக்கணக்கு (4)

$$X_1 = \begin{bmatrix} 2, 3, -1, -1 \end{bmatrix}, \; X_2 = \begin{bmatrix} 1, -1, -2, -4 \end{bmatrix}$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 3, & 1, & 3, & -2 \end{bmatrix}, \; X_4 = \begin{bmatrix} 6, & 3, & 0, & -7 \end{bmatrix}$$

ஆகிய வெக்டர் ஒருபடித் தொடர்பிலாதவை என நிறுவுக.

முதல் மூலகம் 0 ஆகும்படி X_1, X_2-களை இணைத்தால்

$$X_1 - 2X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 & 7 \end{bmatrix} \qquad \ldots \quad (1)$$

இதேபோல், X_2, X_3-களை இணைத்தால்

$$X_3 - 3X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 9 & 10 \end{bmatrix} \qquad \ldots \quad (2$$

இதேபோல், X_3, X_4-களை இணைத்தால்

$$X_4 - 2X_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -6 & 11 \end{bmatrix} \qquad \ldots \quad (3)$$

இரண்டாவது மூலகமும் 0 ஆகும்படி (1), (2)-களை இணைத்தால்

$$4(X_1 - 2X_2) - 5(X_3 - 3X_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -33 & -22 \end{bmatrix} \qquad \ldots \quad (4)$$

இதேபோல், (2), (3)-களை இணைத்தால்

$$(X_3 - 3X_2) - 4(X_4 - 2X_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 33 & -34 \end{bmatrix} \ldots \quad (5)$$

இப்போது, மூன்றாவது மூலகமும் 0 ஆகும்படி (4), (5)-களை இணைத்தால்

$$4(X_1-2X_2)-5(X_3-3X_2)+(X_3-3X_2)-4(X_4-2X_3)$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -56 \end{bmatrix}$$

அதாவது, $4X_1+4X_2+4X_3-4X_4=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -56 \end{bmatrix}$

அல்லது $X_1+X_2+X_3-X_4=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}$

இனி எந்தவிதமான ஒருபடிச் சேர்மானத்திலும் நான்காவது மூலகத்தையும் 0 ஆக்க முடியாது.

எனவே X_1, X_2, X_3, X_4 ஆகிய வெக்டர்கள் ஒருபடித் தொடர்பிலாதவை ஆகும்.

மாதிரிக்கணக்கு (5)

$$X_1=\begin{bmatrix} 1, & 2, & 3 \end{bmatrix},$$

$$X_2=\begin{bmatrix} 3, & -2, & 1 \end{bmatrix}, \quad X_3=\begin{bmatrix} 1, & -6, & -5 \end{bmatrix}$$

ஆகிய முப் பரிமாணமுள்ள மூன்று வெக்டர்கள் ஒருபடித் தொடர்புடையவை என நிறுவுக.

முதல் மூலகம் 0 ஆகும்படி X_1, X_2-களை இணைத்தால்,

$$X_2-3X_1=\begin{bmatrix} 0 & -8 & -8 \end{bmatrix} \quad \ldots \quad (1)$$

முதல் மூலகம் 0 ஆகும்படி X_2, X_3-களை இணைத்தால்

$$X_2-3X_3=\begin{bmatrix} 0 & 16 & 16 \end{bmatrix} \quad \ldots \quad (2)$$

இரண்டாவது மூலகமும் 0 ஆகும்படி (1), (2) சமன்பாடுகளை இணைத்தால்

$$(X_2-3X_3)+2(X_2-3X_1)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

அதாவது, $-6X_1 + 3X_2 - 3X_3 = 0$

அதாவது, $2X_1 - X_2 + X_3 = 0$

அதாவது, $k_1 X_1 + k_2 X_2 + k_3 X_3 = 0$

இங்கே, $k_1 = 2,\ k_2 = -1,\ k_3 = 1$

k_1, k_2, k_3 ஆகிய எல்லாக் கணியங்களின் மதிப்பு சூழியல்ல என்பதால், கொடுத்துள்ள மூன்று வெக்டர்களும் ஒருபடித் தொடர்புடையவை.

§ 37·2. குறிப்புகள்

மேற்கண்ட மாதிரிக் கணக்குகளை நன்கு ஆராய்ந்தால் பின் கண்ட விளைவுகளை எளிதாக ஊகிக்கலாம்:

(1) முப்பரிமாணமுள்ள மூன்று வெக்டர்கள் ஒருபடித் தொடர்புடையனவாகவும் இருக்கலாம்; ஒருபடித் தொடர்பிலாதவையாகவும் இருக்கலாம். அதாவது முப்பரிமாணமுள்ள வெக்டர்களின் மிகப்பெரிய எண்ணிக்கை மூன்று ஆகும். ஆனால், முப்பரிமாணமுள்ள எந்த நான்கு வெக்டர்களும் ஒருபடித் தொடர்புடையவையே.

(2) இந்த விளைவுகளைப் பின்வருமாறு பொதுமைப் படுத்தலாம் :

(i) n பரிமாணமுள்ள வெக்டர்களுள் ஒருபடித் தொடர்பில்லாத வெக்டர்களின் மிகப் பெரிய எண்ணிக்கை n.

(ii) n பரிமாணமுள்ள வெக்டர்களுள் மிகப்பெரிய எண்ணிக்கையுள்ள ஒருபடித் தொடர்பிலாத வெக்டர்கள் $X_1, X_2, \ldots X_n$ என்றால், $X_1, X_2, X_3, \ldots X_n, X_{n+1}$ என்ற $(n+1)$ வெக்டர்கள் எப்போதும் ஒருபடித் தொடர்புடையவை. (இங்கே X_{n+1} ஏதாவதொரு n பரிமாணமுள்ள வெக்டர்).

(3) மேலே விளக்கிய ஒருபடித் தொடர்பு கொள்கையை வெக்டர்களுக்கு மாத்திரம் அல்லாமல் எந்தக் கணியங்களுக்கும் வரைவிலக்கணம் செய்யலாம்.

எடுத்துக்காட்டு :

$1, x, x^2$ என்ற கணியங்களை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$k_1 \cdot 1 + k_2 x + k_3 x^2 = 0$ எனக் கொள்க.

இப்போது, $x=0, 1, 2$ என ஒன்றன்பின் ஒன்றாகப் (in turn) பிரதியிட்டால்,

$$k_1 + 0 + 0 = 0$$
$$k_1 + k_2 + k_3 = 0$$
$$k_1 + 2k_2 + 4k_3 = 0$$

இவற்றிலிருந்து $k_1 = 0 = k_2 = k_3$ ஆகும்.

எனவே, $1, x, x^2$ என்ற கணியங்கள் ஒருபடித் தொடர்பிலாதவை. (x-க்கு எந்த மூன்று மதிப்புகளிட்டு மூன்று சமன்பாடுகளைப் பெற்றுத் தீர்வுகண்டாலும், $k_1=0=k_2=k_3$ என்றுதான் கிடைக்கும் என்று அறிக.)

§ 37-3 வெக்டர் வெளி (Vector space)

X, Y என்பவை V என்ற வெக்டர் தொகுதியைச் சேர்ந்த ஏதாவது இரண்டு வெக்டர்கள் என்றும், k ஏதாவதோர் எண்ணி என்றும் கொள்வோம்.

X, Y இவற்றைக் கூட்டி வரும் $X+Y$ என்ற வெக்டரும் Xஐ k என்ற எண்ணியால் பெருக்கி வரும் kX என்ற வெக்டரும் V என்ற வெக்டர் தொகுதியைச் சேர்ந்தவைகளே ஆயின், அந்த வெக்டர் தொகுதி V-க்கு ஒரு வெக்டர் வெளி (Vector spacc) என்று பெயர்.

$[x, y, z]$ என்பவை முப்பரிமாண வெளியில் உள்ள ஏதாவதொரு புள்ளியின் ஆயத் தொலைவுகளைக் குறிக்குமாயின், $[x_i, y_j, z_k]$, $i, j, k = 1, 2, 3, \ldots$ என்னும் ஆயத் தொலைவுகளின் தொகுதி ஒரு வெக்டர் வெளியைக் குறிக்கும்.

§ 37-4. அடிப்படை வெக்டர் தொகுதி - வெக்டர் வெளியின் பரிமாணம் (System of base vectors or basis - Dimension of a Vector Space)

V என்ற வெக்டர் வெளியில் அமைந்துள்ள $e_1, e_2, e_3, \ldots e_n$ என்ற வெக்டர்கள்

(அ) ஒருபடித் தொடர்பில்லாதவை,

(ஆ) V என்ற வெக்டர் வெளியில் அமைந்துள்ள அனைத்து வெக்டர்களையும் ஒருபடிச் சேர்க்கையால் பிறப்பிக்கின்ற (generating) தன்மை,

ஆகிய இரு பண்புகளைப் பெற்றிருந்தால், அவற்றிற்கு V-ன் அடிப்படை வெக்டர் தொகுதி (System of base vectors அல்லது basis) என்று பெயர்.

ஒரு வெக்டர் வெளிக்கு ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட அடிப்படை வெக்டர் தொகுதிகள் இருக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$e_1 = [1, 0, 0] \quad e_2 = [0, 1, 0] \quad e_3 = [0, 0, 1]$$

என்ற வெக்டர்கள் ஒருபடித் தொடர்பிலாதவை. மேலும், x, y, z ஆகியவை எண்ணிகளெனில், $xe_1 + ye_2 + ze_3$ என்ற ஒருபடிச் சேர்க்கையால் $[x, y, z]$ என்ற வெக்டர் கிடைக்கிறது. x, y, z ஆகியவை பல்வேறு மதிப்புகளைப் பெறும் பொழுது பல்வேறு வெக்டர்கள் கிடைக்கின்றன. e_1, e_2, e_3 என்ற வெக்டர் தொகுதி முப்பரிமாண வெளியில் அமையும் மூன்று புள்ளிகளைக் குறிக்குமாயின், $xe_1 + ye_2 + ze_3$ என்பது x, y, z களின் பல்வேறு மதிப்புகளுக்கு, அவ் வெளியில் அமையும் அனைத்துப் புள்ளிகளையும் பிறப்பிக்கும் என அறியலாம்.

எனவே, e_1, e_2, e_3 என்பவை ஒரு வெக்டர் வெளி (அதாவது இங்கு முப்பரிமாண வெளி) யின் அடிப்படை வெக்டர் தொகுதியைக் குறிக்கும்.

அவ்வுண்ணமே,

$$e_1' = [1, 1, 1], \quad e_2' = [1, 1, 0], \quad e_3' = [1, 0, 0]$$

மற்றும் $E_1 = [1, 1, 0]$, $E_2 = [1, 0, 1]$, $E_3 = [0, 1, 1]$ என்ற இரு வெக்டர் தொகுதிகளும் மேற்கூறிய அதே வெக்டர் வெளியின் மற்ற அடிப்படை வெக்டர் தொகுதிகளாகும்.

ஒரு வெக்டர் வெளியின் அடிப்படைத் தொகுதியில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையை அவ் வெக்டர் வெளியின் பரிமாணம் (dimension) என்று கூறுவர்.

மேலே விளக்கிய வெக்டர் வெளியின் அடிப்படை வெக்டர் தொகுதியில் e_1, e_2, e_3 என்னும் மூன்று உறுப்புகள் அமைந்துள்ளதால் அவ் வெக்டர் வெளி முப்பரிமாண வெக்டர் வெளி (Three dimensional vector space) என்ற பெயர் பெறும். n பரிமாண வெக்டர் வெளியை V_n எனக் குறிப்பது வழக்கம்.

இவ்வாறே, $e_1 = [1, 0, 0, \ldots 0]$,

$e_2 = [0, 1, 0, \ldots 0], \ldots e_n = [0, 0, \ldots 0, 1]$ என்பவை V_n-ன் ஓர் அடிப்படை வெக்டர் தொகுதி என உய்த்தறியலாம்.

§ 38. ஓர் அணியின் அளவைக்கும் அதன் ஒருபடித் தொடர்பிலா நிரை (நிரல்)களின் எண்ணிக்கைக்கும் உள்ள பிணைப்பு [Relation between the rank of a matrix and the number of linearly independent rows (columns)]

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$ என்ற (3, 3) தரமுள்ள அணியில்

$$C_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}, \quad C_3 = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$$

என்ற நிரல்கள் ஒருபடித் தொடர்பிலாதவை எனில்

$$xC_1 + yC_2 + zC_3 = 0 \quad \ldots \quad (1)$$

என்ற சமன்பாடு சமனடைவதற்கான நிபந்தனை

$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$ ஆகும்.

இதையே வேறுவிதமாக எடுத்துரைக்கலாம்.

அணிச் சமன்பாடு (1) ஐ விரித்து

$$\begin{bmatrix} a_{11}x \\ a_{21}x \\ a_{31}x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{12}y \\ a_{22}y \\ a_{32}y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{13}z \\ a_{23}z \\ a_{33}z \end{bmatrix} = 0$$

அல்லது $a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0$$

என எழுதி இந்தச் சமன்பாடுகளுக்கு அற்பத் தீர்வுக்கணம்தான் உண்டு என்று கூறலாம்.

இதற்கான நிபந்தனை : $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ (§ 10·1)

அதாவது, $|A| \neq 0$ அல்லது A-ன் அளவை $= 3$

மேலும், $|A| \neq 0$ என்றால் $|A^T| \neq 0$. எனவே, A^T-ன் அளவையும் 3 ஆகும்.

இதிலிருந்து, ஒரு (3, 3) தரமுள்ள சதுர அணியின் மூன்று நிரல்களும் ஒருபடித் தொடர்பிலாதவையானால் அந்த அணியின் அளவை 3 ஆகும். மறுதலையாக, ஒரு (3, 3) தரமுள்ள மூன்று சதுர அணியின் அளவை 3 ஆனால், அதன் மூன்று நிரல்களும் (நிரைகளும்) ஒருபடித் தொடர்பிலாதவையாகும்.

இதைப் பொதுமைப் படுத்திப்பின்வருமாறு கூறலாம் : ‘பூச்சியமில் கோவை (n, n) தரமுள்ள சதுர அணியின் அளவை n ஆகும். அதன் n நிரைகளும் ஒருபடித் தொடர்பிலாதவை ; மேலும், அதன் n நிரல்களும் ஒருபடித் தொடர்பிலாதவை .’

§ 38 1 துணை முடிவு

இப்போது (m, n) தரமுள்ள $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$

என்ற அணியை எடுத்துக் கொள்வோம். இதன் அளவை r எனில், r-தரமுள்ள $|A_r|$ என்ற ஒரு சிற்றணிக் கோவையாவது சுழி மதிப்புடையதல்லாமல் இருக்கவேண்டும். ஆகவே, சிற்றணி A_r-ல் உள்ள r நிரைகளும், அதனால் கொடுத்துள்ள அணி A-ல் உள்ள r நிரைகளும் ஒருபடித் தொடர்பிலாது இருக்கவேண்டும். நாம் நிரைகளுக்குக் கூறியது நிரல்களுக்கும் பொருந்தும்.

மேலும் A-ன் அளவை r என்பதால், $(r + 1)$ தரமுள்ள ஒவ்வொரு சிற்றணிக்கோவையும் சுழி மதிப்புடையதாகும். எனவே, $(r + 1)$ நிரைகள் ஒருபடித் தொடர்புடையதாகவே இருக்கும்.

இதிலிருந்து நாம் பெறுவது யாதெனில் :

'ஓர் அணியில் ஒருபடித் தொடர்பில்லாத நிரை (நிரல்)களின் மிகப் பெரிய எண்ணிக்கை அந்த அளவைக்குச் சமம் ஆகும். அந்த அணியின் அளவை r என்றால் r நிரை (நிரல்) கள் ஒருபடித் தொடர்பில்லாதவையாகும். ஆனால், மற்ற நிரை (நிரல்)கள் ஒவ்வொன்றும் ஒருபடித் தொடர்பிலா நிரை (நிரல்) களின் ஒரு படிச் சேர்மானமாக இருக்கும்.

பயிற்சி 5

I. கீழ்வரும் வெக்டர்கள் ஒருபடித் தொடர்புடையவை என்று காண்பிக்கவும். ஒருபடித் தொடர்பினையும் எழுதுக.

(1) $X_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, $X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$,

$X_3 = \begin{bmatrix} 4 & -7 & 1 \end{bmatrix}$

(2) $X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $X_2 = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$,

$X_3 = \begin{bmatrix} -7 & 13 & 4 \end{bmatrix}$

(3) $X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $X_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$,

$X_3 = \begin{bmatrix} 8 & 13 & 0 \end{bmatrix}$

(4) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$,

$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$,

$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(5) $X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$,

$X_2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$,

$X_3 = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 8 & -7 \end{bmatrix}$

(6) $\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$,

$\beta = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$,

$\gamma = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix}$

(7) $\alpha = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$,

$\beta = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$,

$\gamma = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

III. கீழ்க்கண்ட வெக்டர்கள் ஒருபடித் தொடர்பு இல்லாதவை என்று காண்பிக்கவும்:

(1) $X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $X_2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

(2) $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

$Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(3) $X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$,

$X_3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$

(4) $X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $X_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$,

$X_3 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

(5) $X = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(6) $\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(7) $X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$X_3 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $X_4 = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

விடைகள்

1. (1) $3X_1 - 2X_2 - X_3 = 0$ (2) $3X_1 - 2X_2 - X_3 = 0$

(3) $2X_1 + 3X_2 - X_3 = 0$ (4) $2A + B - C = 0$

(5) $2X_1 - X_2 + X_3 = 0$ (6) $3\alpha - \beta + \gamma = 0$

(7) $\alpha + \beta - \gamma = 0$

6. ஒருங்கை ஒருபடிச் சமன்பாடுகள்

(Simultaneous Linear Equations)

§ **39.** m தெரியாக் கணியங்கள் கொண்ட சமபடியல்லாத (non-homogeneous) n ஒருங்கை ஒருபடிச் சமன்பாட்டுத் தொகுதியின் இசைவுடைமை (consistency)

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \quad \dots \quad (1)$$

மேற்கண்ட சமன்பாட்டுத் தொகுதிக்கு ஒரு தீர்வுக் கணமோ (solution set) அல்லது பல தீர்வுக்கணங்களோ உண்டானல், அதற்கு இசைவுடைய (consistent) சமன்பாட்டுத் தொகுதி என்று பெயர். ஒரு தீர்வுக் கணமும் காணமுடியாத சமன்பாட்டுத் தொகுதிக்கு இசைவிலா (inconsistent) சமன்பாட்டுத் தொகுதி என்று பெயர்.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ என்பதற்கு

குணக அணி (Co efficient Matrix) என்றும்,

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_m \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$$ என்பவற்றிற்கு

முறையே தெரியாக் கணிய நிரல் வெக்டர் என்றும், வலப்பக்கத்து மாரு உறுப்பு நிரல் வெக்டர் என்றும் பெயர்.

மேலும், $$[A/B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

என்ற அணி (விளிம்பு) கூட்டிய அணி (Augmented matrix) என்ற பெயர் பெறும்.

§ 39·1 ரூசே தேற்றம்

கொடுத்துள்ள ஒருங்கை ஒருபடிச் சமன்பாட்டுத் தொகுதியின் குணக அணி, கூட்டிய அணி ஆகிய இரண்டின் அளவைகளும் சமம் என்ருல் அந்தச் சமன்பாட்டுத் தொகுதி இசைவுடையது.

§ 39–ல் உள்ள சமன்பாட்டுத் தொகுதி (1) ஐ எடுத்துக் கொள்வோம். இந்தத் தொகுதியை

$$AX = B \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \qquad (1^1)$$

என்ற அணிச் சமன்பாடாக எழுதலாம்.

இப்போது. A-ன் n நிரல்களை C_1, C_2, C_n என்ற நிரல் வெக்டர்களாகக் குறிப்போம்.

அதாவது, $C_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} C_1 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} \cdots C_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_2^n \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad A = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A/B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_n & B \end{bmatrix}$$

மேலும், சமன்பாடு (1') ஐப் பின்வருமாறு எழுதலாம் :

$$C_1 x_1 + C_2 x_2 + \ . + C_n x_n = B \qquad \dots \qquad (2)$$

(i) $A, [A \mid B]$ என்ற இரண்டு அணிகளின் அளவை r எனக் கொள்வோம்.

§ 38·1-ல் விளக்கியபடி அத்த இரண்டு அணிகளிலும் பெரும மாக (maximum) r நிரல்கள் ஒருபடித் தொடர்பில்லாதவையாக இருக்கும். விளக்கத்தை எளிமையாக்குவதற்கு, முதல் r நிரல்கள் (அதாவது, $C_1, C_2, \dots C_r$) ஒருபடித் தொடர்பில்லாதவை எனக் கொள்வோம். எனவே $C_{r+1}, C_{r+2}, \dots C_n$, B ஆகிய நிரல் வெக்டர்களில் ஒவ்வொன்றையும் $C_1, C_2 \dots C_r$ என்ற r நிரல் வெக்டர்களின் ஒருபடிச் சேர்மானமாக அமைக்கலாம்.

$$\therefore \quad k_1 C_1 + k_2 C_2 + \dots + k_r C_r = B \qquad \dots \qquad (3)$$

இங்கே $k_1, k_2, \dots k_r$ எல்லாமே சுழியல்ல.

சமன்பாடு (3) ஐ வேறுவிதமாக

$$k_1 C_1 + k_2 C_2 + \dots + k_r C_r + 0 \cdot C_{r+1} + \dots 0 \cdot C_n = B \quad \dots \quad (4)$$

என்றும் எழுதலாம்.

(2) ஐயும், (4) ஐயும் ஒப்பிட்டு நோக்கினுல்

$$x_1 = k_1, \ x_2 = k_2, \dots x_r = k_r$$

$$x_{r+1} = 0, \ x_{r+2} = \dots = x_n$$

எனவே $A, [A \mid B]$ ஆகிய இரண்டு அணிகளின் அளவை களும் சமமாகும் போது தொகுதி (1)-க்கு இசைவுடைய தீர்வுகள் கிடைத்துள்ளன. அதாவது தொகுதி (1) இசைவுடையவை.

(ii) இனி சமன்பாட்டுத் தொகுதி (1) இசைவுடையவை என்றால், A, $[A \mid B]$-களின் அளவைகள் சமம் என்று நிறுவுவோம். சமன்பாடுகள் (1)-ன் தீர்வுகள் $y_1, y_2, \ldots y_n$ என்றால்

$$C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n = B \qquad \ldots \qquad (5)$$

A-ன் அளவை r என்றால், $C_{r+1}, C_{r+2}, \ldots C_n$ ஆகிய நிரல் வெக்டர்களை $C_1, C_2, \ldots C_r$ ஆகியவற்றின் ஒருபடிச்சேர்மானமாக எழுதமுடியும். ஆனால், சமன்பாடு (4)-லிருந்து B-ம் C_1, C_2, C_r ஆகியவற்றின் ஒருபடிச் சேர்மானம் என்று அறிகிறோம். எனவே, $[A \mid B]$ - ன் அளவையும் r ஆகும். அதாவது, $A, [A \mid B]$ ஆகியவற்றின் அளவைகள் சமம்.

[குறிப்பு : இசைவிலா சமன்பாடுகளின் கூட்டிய அணியின் அளவையானது குணக அணியின் அளவையைவிட அதிகமாகும்.]

§ 40. காவுசு விலகல் முறை (Gauss' Reduction method)

n தெரியாக் கணியங்கள் கொண்ட சமபடியல்லாத m ஒருங்கை ஒருபடிச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணல்.

வகை (1): $(m > n)$ விளக்கம் எளிதாவதற்கு $m = 4$, $n = 3$ என எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 &= b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 &= b_2 \\ a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 &= b_3 \\ a_{41}\,x_1 + a_{42}\,x_2 + a_{43}\,x_3 &= b_4 \end{aligned}$$

என்பவை கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகள் எனில் நிரை முதனிலை மாற்றங்கள் முறையில் மேற்கண்ட சமன்பாடுகளை மேல் முக்கோண (upper triangular) வடிவத்தில் கொண்டுவரலாம்.

அதாவது,
$$\begin{aligned} \alpha_{11}\,x_1 + \alpha_{12}\,x_2 + \alpha_{13}\,x_3 &= \beta_1 \\ \alpha_{22}\,x_2 + \alpha_{23}\,x_3 &= \beta_2 \\ \alpha_{33}\,x_3 &= \beta_3 \\ 0 &= \beta_4 \end{aligned}$$

இங்கே $\beta_4 = 0$ என்றால் கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகள் இசைவுடையவை. அதாவது, குணக அணியும் கூட்டிய அணியும் சம அளவை உடையன. அந்தச் சம அளவையின் பெருமம் 3 ஆகும்.

இப்போது A, $[A \mid B]$ ஆகியவற்றின் சம அளவை 3 என்ருல் x_1, x_2, x_3–களுக்கு ஒரு தீர்வுக்கணம் மட்டுமே உண்டு.

ஆனுல் $\beta \neq 0$ என்ருல் அந்தச் சமன்பாடுகள் இசைவிலா தவை. அதாவது, கூட்டிய அணியின் அளவை > குணக அணியின் அளவை. ஆகவே, குணக அணியும் கூட்டிய அணியும் சம அளவை பெருதவை என்பதால் அந்தச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண இயலாது.

வகை (2) : $m < n$; $m = 2, n = 3$ என்க.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_{23}x_3 = b_2$$

இந்தச் சமன்பாடுகளை

$$\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 = \beta_1$$
$$\alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 = \beta_2$$

என்று எழுத முடியும்.

இப்போது, குணக அணியும், கூட்டிய அணியும் சம அளவை (பெருமம் 2) உடையன. எனவே, கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகள் இசைவுடையன.

இரண்டாவது சமன்பாட்டிலிருந்து

$$x_2 = \frac{\beta_2 - \alpha_{23}x_3}{\alpha_{22}}$$

அதாவது, $x_2 = a + bx_3$ என்போம்.

இதேமாதிரி முதல் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$x_1 = c + dx_3$$

எனவே, λ என்பது ஏதாவது ஓர் எண்ணி (scalar) என்ருல்,

$$x_1 = c + d\lambda,\ x_2\ a + b\lambda,\ x_2 = \lambda$$

என்பது கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகளின் பொதுத் தீர்வு கணம் ஆகும்.

அதாவது, இந்தச் சமன்பாடுகளுக்கு λ என்ற ஒரு துணையலகு (Parameter) கொண்ட பல தீர்வுக் கணங்கள் உண்டென்று அறிகிருேம்.

வகை (3) : $m = n$; $m = n = 3$ என்போம்

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

இவற்றை மாற்றி

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 &= \beta_1 \\ \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 &= \beta_2 \\ \alpha_{33}x_3 &= \beta_3 \end{aligned}$$

என்று எழுத முடியும்.

இங்கே குணக அணியும் கூட்டிய அணியும் சம அளவை (பெருமம் 3) உடையதாகும். எனவே, சமன்பாடுகள் இசைவு உடையன. A-க்கும் $[A \mid B]$-க்கும் சம அளவை 3 என்றால், கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகளுக்கு ஒரே தீர்வுக் கணம் மட்டுமே உண்டாகும்.

§ 40·1 துணை முடிவு

மேற்கூறியவற்றிலிருந்து பின்வரும் பொது விளைவுகளை எளிதில் அறியலாம்:

குணக அணியின் அளவை r, கூட்டிய அணியின் அளவை r', தெரியாக்கணியங்கள் n எனக் கொள்வோம்.

(i) $r' > r$ என்றால், சமன்பாடுகள் இசைவிலாதவை.

(ii) $r' = r = n$ என்றால், சமன்பாடுகள் இசைவுடையன. மேலும், ஒரே தீர்வுக்கணம் உண்டு.

எனவே, n தெரியாக்கணியங்கள் கொண்ட சமபடியல்லாத n ஒருபடிச் சமன்பாடுகளுக்கு ஒரே தீர்வுக்கணம் மட்டும் உண்டாவதற்கான நிபந்தனை : குணக அணி பூச்சியமில்கோவை அணியாக இருக்கவேண்டும்.

(iii) $r' = r < n$ என்றால், சமன்பாடுகள் இசைவுடையன ; ஆனால் $(n-r)$ துணையலகுகள் கொண்ட எண்ணிலடங்கா (infinitely many) தீர்வுக்கணங்கள் இருக்கும்.

§ 40·2 குறிப்பு

மேற்கண்ட விளக்கத்திலிருந்து, n தெரியாக் கணியங்கள் கொண்ட n சமன்பாடுகளுக்கு ஒரு தீர்வுக்கணம் மட்டுமே உண்டு என்று பொதுவாகக் கூறுவது சரியல்ல என்று தெளிவாகிறது.

எடுத்துக்காட்டு :

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y=1 \\ 3x+5y=1 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{r} 3x-4y=1 \\ -6y+8y=2 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{r} 5x+y=1 \\ 10x+2y=2 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

என்ற மூன்று சமன்பாட்டுத் தொகுதிகள் ஒவ்வொன்றிலும் இரண்டு தெரியாக் கணியங்கள் உண்டு.

இப்போது, (1)-ல் குணக அணி $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ -ன்

அளவை $= 2$; கூட்டிய அணி $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ -ன்

அளவையும் 2 ஆகும். $\therefore \; r' = r = n$

இந்தச் சமன்பாடுகளுக்கு $x = 2, \; y = -1$ என்ற ஒரே தீர்வுக்கணம் தான் உண்டு.

(2)-ல் குணக அணி $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$ -ன் அளவை $= 1$;

கூட்டிய அணி $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -6 & 8 & 2 \end{bmatrix}$ -ன் அளவை $= 2$

$\therefore \; r' > r$. ஆகவே இந்தச் சமன்பாடுகளுக்குத் திர்வுகள் இல்லை.

(3)-ல் குணக அணி $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$ -ன் அளவை = 1;

கூட்டிய அணி $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 10 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ -ன் அளவை = 1.

$\therefore \quad r' = r < n.$ மேலும் $n - r = 1$

எனவே, இந்தச் சமன்பாடுகளுக்கு $x = \lambda$, $y = 1 - 5\lambda$ என்று ஒரு துணையலகு கொண்ட பல தீர்வுக்கணங்கள் உண்டென்று அறிகிறோம்.

§ 40·3. குறிப்பு

சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணும்போது குணக அணி, கூட்டிய அணி ஆகியவற்றின் அளவைகளைக் கண்டு அதன் மூலம் இசைவுடைமை குறித்து ஆராய்ந்து அதன் பின்புதான் தீர்வு காண விழைய வேண்டியதில்லை. காவுசு முறையில் தீர்வு காணும்போது கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகள் இசைவுடையனவா இல்லையா என்பது முடிவில் தெரிந்து விடும். அதோடு இசைவுடையன என்றால், தீர்வுக் கணங்களும் உடனடியாகக் கிடைத்துவிடும்.

§ 40·4. குறிப்பு

காவுசு முறையில் தீர்வு காணும் பொழுது நிரல் முதனிலை மாற்றங்களை மேற்கொண்டால், $[A \mid B]$-ன் அளவை மாறாமல் இருக்கும். அவ்வாறு நிரல் முதனிலை மாற்றங்களிலிருந்து பெறப்படும் சமன்பாடுகள் கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகளுக்குச் சமானம் (equivalent) ஆகா. ஆனால், நிரை முதனிலை மாற்றங்களால் மாறிய சமன்பாடுகள் கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகளுக்கு எப்போதும் சமானம் ஆகும். எனவே, காவுசு முறையில் தீர்வு காணும்போது நிரை முதனிலை மாற்றங்களையே மேற்கொள்ள வேண்டிய அவசியத்தை நினைவில் கொள்ள வேண்டும்.

மாதிரிக்கணக்கு (1):

கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகள் இசைவுடையனவா என ஆராய்ந்து, இசைவுடையனவென்றால் அவற்றின் தீர்வு காண்க.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ x - y + 2z &= 5 \\ 3x + y + z &= 8 \\ 2x - 2y + 3z &= 7 \end{aligned}$$

[Roorkee '66]

இப்போது, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$

$$\therefore [A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \\ 2 & -2 & 3 & 7 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & -10 \\ 0 & -4 & 1 & -5 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} (R_2 \to R_2 - R_1\,; \\ R_3 \to R_3 - 3R_1\,; \\ R_4 \to R_4 - R_1) \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} (R_3 \to R_3 - R_2\,; \\ R_4 \to R_4 - 2R_2) \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right] \quad \left(R_3 \to -\frac{1}{3} R_3\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad (R_4 \to R_4 + R_3)$$

∴ குணக அணியின் அளவை = 3 = கூட்டிய அணியின் அளவை.

எனவே, கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகள் இசைவுடையன என்று அறிகிறோம். அவை பின்வரும் 3 சமன்பாடுகளுக்குச் சமானமாகும்.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ -2y + z &= -1 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

∴ $x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3$

மாதிரிக்கணக்கு **(2)**

கீழ்வரும் சமன்பாடுகள் இசைவுடையன என்று காண்பிக்கவும். அவற்றின் தீர்வு காண்க.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ 2x + y + 3z &= 13 \\ 5x + 2y + z &= 12 \end{aligned}$$

[B. E. '64]

இங்கே, $[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 13 \\ 5 & 2 & 1 & 12 \end{array}\right]$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & -18 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} (R_2 \to R_2 - 2R_1; \\ R_3 \to R_3 - 5R_1) \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{array}\right] (R_3 \to R_3 - 3R_2)$$

∴ A-ன் அளவை $= 3 = [A \mid B]$-ன் அளவை $=$ தெரியாக் கணியங்களின் எண்ணிக்கை

∴ கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகள் இசைவுடையன. அந்த சமன்பாடுகள் பின்வரும் சமன்பாடுகளுக்குச் சமானமாகும்.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ -y + z &= 1 \\ -7z &= -21 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3$$

மாதிரிக்கணக்கு (3)

பின்வரும் சமன்பாடுகள் இசைவுடையனவா என ஆராய்க.

$$\begin{aligned} 4x - 5y - 2z &= 2 \\ 5x - 4y + 2z &= -2 \\ 2x + 2y + 8z &= 1 \end{aligned}$$

இங்கே, $[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -5 & -2 & 2 \\ 5 & -4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 8 & 1 \end{array}\right]$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 5 & -4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 8 & 1 \end{array}\right] \left(R_1 \to \frac{1}{4} R_1\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{9}{4} & \frac{9}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & \frac{9}{2} & 9 & 9 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l}(R_2 \to R_2 - 5R_1; \\ R_3 \to R_3 - 2R_1)\end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{9}{4} & \frac{9}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right] \quad (R_3 \to R_3 - 2R_2)$$

∴ A-ன் அளவை $= 2$; ஆனால் $[A \mid B]$-ன் அளவை $= 3$

∴ கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகள் இசைவுடையன அல்ல.

மாதிரிக் கணக்கு (4)

பின்கண்ட சமன்பாடுகளின் இசைவுடைமைபற்றி ஆராய்ந்து தீர்வு காண்க.

$$\begin{aligned} x - 3y - 8z &= -10 \\ 3x + y - 4z &= 0 \\ 2x + 5y + 6z &= 13 \end{aligned}$$

இங்கே $[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -8 & -10 \\ 3 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 13 \end{array}\right]$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -8 & -10 \\ 0 & 10 & 20 & 30 \\ 0 & 11 & 22 & 33 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l}(R_2 \to R_2 - 3R_1; \\ R_3 \to R_3 - 2R_1)\end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -8 & -10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 11 & 22 & 33 \end{array}\right] \left(R_2 \to \frac{1}{10} R_2\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -8 & -10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] (R_3 \to R_3 - 11R_2)$$

$\therefore$ A-ன் அளவை $= 2 = [A \mid B]$-ன் அளவை

$<$ தெரியாக்கணியங்களின் எண்ணிக்கை $= 3$

இங்கே $n - r = 3 - 2 = 1$

எனவே, சமன்பாடுகள் இசைவுடையன ; ஆனால், ஒரு துணை யலகு உடைய பல தீர்வுக் கணங்கள் கொண்டவை.

அதாவது, $x - 3y - 8z = -10$

$y - 2z = 3$

அல்லது,

$$\begin{aligned} x &= 3y + 8z - 10 \\ &= 9 - 6z + 8z - 10 \\ &= 2z - 1 \end{aligned}$$

λ என்பது ஏதாவது ஓர் எண்ணி என்றால்,

$x = 2\lambda - 1$, $y = 3 - 2\lambda$, $z = \lambda$

அல்லது

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

மாதிரிக்கணக்கு (5) :

பின்வரும் சமன்பாடுகளின் இசைவுடைமை ஆராய்ந்து தீர்வு காண்க.

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z - 5\omega &= -7 \\ -7y + 3z - 7\omega &= -13 \\ -3x + 4y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

இங்கே, $[A \mid B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -5 & -7 \\ 0 & -7 & 3 & -7 & -13 \\ -3 & 4 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & -7 & 3 & -7 & -13 \\ -3 & 4 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \left(R_1 \to \frac{1}{2} R_1\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & 1 & \frac{13}{7} \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{13}{2} & -\frac{15}{2} & -\frac{21}{2} \end{array}\right] \left(R_2 \to -\frac{1}{7} R_2 ; \; R_3 \to R_3 + R_1\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & 1 & \frac{13}{7} \\ 0 & 0 & \frac{53}{7} & -10 & -\frac{106}{7} \end{array}\right] \left(R_3 \to R_3 - \frac{5}{2} R_1\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -5 & -7 \\ 0 & 7 & -3 & 7 & 13 \\ 0 & 0 & 53 & -70 & -106 \end{array}\right] \begin{array}{l} (R_1 \to 2R_1 ; \\ R_2 \to 7R_2 ; \\ R_3 \to 7R_3) \end{array}$$

$\therefore$ A-ன் அளவை $= 3 = [A \mid B]$-ன் அளவை

$<$ தெரியாக் கணியங்களின் எண்ணிக்கை $= 4$.

அதாவது, $n - r = 4, - 3 = 1$. எனவே, கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகள் இசைவுடையன ; ஆனால், ஒரு துணையலகுடைய பல தீர்வுக்கணங்கள் கொண்டவை. கொடுத்துள்ள சமன் பாடுகள் பின்வரும் சமன்பாடுகளுக்குச் சமானமாகும்.

$$2x - y + 3z - 5w = -7$$
$$7y - 3z + 7w = 13$$
$$53z - 70w = -106$$

$$\therefore \quad z = \frac{70w}{53} - 2$$

$$y = \frac{-23w}{-53} + 1$$

$$x = \frac{16w}{53}$$

அல்லது λ என்பது ஏதாவது ஓர் எண்ணியானால்

$$x = 16\lambda, \quad y = -23\lambda + 1, \quad z = 70\lambda - 2, \quad w = \frac{\lambda}{53}$$

அதாவது, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 16 \\ -23 \\ 70 \\ 53 \end{bmatrix}$.

மாதிரிக்கணக்கு (6)

$$x + y + 2z = 2$$
$$2x - y + 3z = 2$$
$$5x - y + az = b$$

என்ற சமன்பாடுகளுக்கு (a) தீர்வு இல்லை (b) ஒரேயொரு தீர்வுக் கணம் உண்டு (c) எண்ணிலடங்காத் தீர்வு கணங்கள் உண்டு என்ற மூன்று வகைகளிலும் a, b-களின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(Madurai B.E., '71)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & a \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ b \end{bmatrix}$$

என்றால் அணிமுறையில் கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகளை $AX = B$ என்று எழுதலாம். ... (1)

$$[A \mid B] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & -6 & -10+a & b-10 \end{array}\right] \begin{array}{l} (R_2 \to R_2 - 2R_1; \\ R_3 \to R_3 - 5R_1) \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 10-a & 10-b \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ (R_2 \to -R_2) \\ (R_3 \to -R_3) \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8-a & 6-b \end{array}\right] (R_3 \to R_3 - 2R_2)$$

கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகள் பின்வரும் வடிவம் பெறும்:

$$x + y + 2z = 2$$
$$3y + z = 2$$
$$(8-a)z = 6-b$$

வகை (1)

மேற்கண்ட சமன்பாடுகள் இசைவிலாதன என்றால் $0 \cdot z = k \; (k \neq 0)$ என்ற முறையில் 3ஆவது சமன்பாடு அமைய வேண்டும்.

$$\therefore \quad 8 - a = 0, \quad b \neq 6$$

அதாவது, $\quad a = 8, \quad b \neq 6$

வகை (2)

மேற்கண்ட சமன்பாடுகள் ஒரே தீர்வுக்கணம் உடையன வென்றால், மூன்றாவது சமன்பாடு $kz = l\,(k \neq 0,\ l$ என்பது 0 உட்பட ஏதாவதொரு எண்ணி) என்ற முறையில் அமைய வேண்டும்.

$\therefore\quad a \neq 8,\quad b$ ஏதாவதொரு எண்ணி.

வகை (3)

மேற்கண்ட சமன்பாடுகள் எண்ணிலடங்காத் தீர்வுக் கணங்கள் உடையன என்றால், 3ஆவது சமன்பாடு $0 = 0$ என்ற முறையில் அமைய வேண்டும்.

அதாவது, $a = 8$ மற்றும் $b = 6$

மாதிரிக்கணக்கு (7) :

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= a \\ 3x - y + 2z &= b \\ x - 5y + 8z &= c \end{aligned}$$

என்பவை இசைவுடைய சமன்பாடுகள் என்றால், a, b, c களுக்கிடையே அமையும் சார்பு காண்க. [B.E., '71]

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 8 \end{bmatrix},\quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

என்றால் கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகளை $AX = B$ என்ற அணிச் சமன்பாடாக எழுதலாம்.

இங்கே $$[A \mid B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & a \\ 3 & -1 & 2 & b \\ 1 & -5 & 8 & c \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & -7 & 11 & b-3a \\ 0 & -7 & 11 & c-a \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (R_2 \to R_2 - 3R_1) \\ (R_3 \to R_3 - R_1) \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & -7 & 11 & b-3a \\ 0 & 0 & 0 & c-b+2a \end{bmatrix} \quad (R_3 \to R_3 - R_2)$$

$\therefore \quad 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = c - b + 2a.$

எனவே, இந்தச் சமன்பாடு இசைவுடையது என்ருல்,

$c - b + 2a = 0$

அல்லது $b = c + 2a$ என்பது நாம் விரும்பிய சார்பு ஆகும்.

பயிற்சி 6 (a).

கீழ்க்காணும் ஒருங்கைச் சமன்பாடுகள் இசைவுடையனவா என்று முதலில் ஆராய்ந்து பின்பு அவற்றின் தீர்வு காண்க :

I (1) $5x + 3y + 3z = 48$, $2x + 6y - 3z = 18$, $8x - 3y + 2z = 21$ (B.E., '65)

(2) $x + y + z = 6$, $2x + y + 3z = 13$, $5x + 2y + z = 12$ (B.E., '64)

(3) $3x - y + 2z = 1$, $2x - 2y + 3z = 2$, $x - y + z = -1$

(4) $x + y + 2z = 4$, $2x - y + 3z = 9$, $3x - y - z = 2$ (B.E., '67)

(5) $4x + 3y + 6z = 25$, $x + 5y + 7z = 13$, $2x + 9y + z = 1$ [Madurai B.E. '71]

(6) $x - 2y + z = 3$, $x + 3z = 11$, $-2y + z = 1$ [Madurai B.E. '70]

(7) $3x + y - z = 3$, $x + y + z = 3$, $x - y - z = -2$ [B. Tech '71]

II. (1) $x + 2y - 5z = -9$, $3x - y + 2z = 5$, $2x + 3y - z = 3$, $4x - 5y + z = -3$

(2) $3x + y + z = 8$, $-x + y + z = -5$, $x + y + z = 6$, $-2x + 2y - 3z = -7$ [B.E., '70]

(3)
$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ 3x - y + 2z &= 1 \\ 2x - 2y + 3z &= 2 \\ x - y - z &= -1 \end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ 3x + y - 2z &= 1 \\ 4x - 3y - z &= 3 \\ 2x + 4y + 2z &= 4 \end{aligned}$$

(5)
$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 2 \\ 3x - 2y - z &= 5 \\ 2x - 5y + 3z &= -4 \\ x + 4y + 6z &= 0 \end{aligned}$$

[B.E., '73]

III. கீழ்வரும் சமன்பாடுகள் இசைவிலாதவை என்று நிறுவுக.

(1)
$$\begin{aligned} 2x + 6y &= 0 \\ 6x + 20y - 6z &= -3 \\ 6y - 18z &= -1 \end{aligned}$$

[B.E., '65]

(2)
$$\begin{aligned} x + y + z &= -3 \\ 3x + y - 2z &= -2 \\ 2x + 4y + 7z &= 7 \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} x + 4y + 7z &= 14 \\ 3x + 8y - 2z &= 13 \\ 7x - 8y + 26z &= 5 \end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned} x + 2y - 5z &= -9 \\ 3x - y + 2z &= 5 \\ 2x + 3y - z &= 3 \\ 4x - 5y + z &= 3 \end{aligned}$$

(5)
$$\begin{aligned} x + y + 2z + w &= 5 \\ 2x + 3y - z - 2w &= 2 \\ 4x + 5y + 3z &= 7 \end{aligned}$$

IV. கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளுக்கு ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட தீர்வுக்கணங்கள் உண்டென்று நிறுவி, அவற்றின் பொதுத் தீர்வுக் கணங்களைக் காண்க.

(1)
$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 4 \\ x + y + 2z &= 5 \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 &= 6 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 5x_4 &= 10 \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} 2x - y - z &= 2 \\ x + 2y + z &= 2 \\ 4x - 7y - 5z &= 2 \end{aligned}$$

[B. Tech '71]

(4)
$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 1 \\ x - y + 2z &= 3 \\ x + 3y - 6z &= -1 \end{aligned}$$

(5) $5x + 3y + 7z = 4$
$3x + 26y + 2z = 9$
$7x + 2y + 10z = 5$

(6) $x - y + z = -1$
$x - 3y + 4z = -6$
$4x + 3y - 2z = -3$
$7x - 4y + 7z = -16$
[M.Sc., '66]

(7) $x - 4y - 3z = -16$
$2x + 7y + 12z = 48$
$4x - y + 6z = 16$
$5x - 5y + 3z = 0$ [M.Sc., '67]

(8) $x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 2$
$x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 3x_4 + 8x_5 = -2$
$-2x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 + 5x_5 = -10$
$3x_1 + 7x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 9x_5 = 4$

V. (1) $x + y + z = 1$, $x + 2y + 4z = k$, $x+4y+10z = k^2$ என்ற சமன்பாடுகள் இசைவுடையன என்றால், k-ன் மதிப்புகளைக் காண்க. [B.E. '71; B. Tech '72]

(2) $kx + y + z = 1$, $x + ky + z = 1$, $x + a + kz = 1$ என்ற சமன்பாடுகள்

(i) ஒரேயொரு தீர்வுக்கணம்

(ii) பல தீர்வுக்கணங்கள் பெறுவதற்கு k-ன் மதிப்புகள் யாவை?

(3) $x+y+z = a$, $3x+4y+5z = b$, $2x+3y+4z = c$ என்ற சமன்பாடுகளுக்கு (i) தீர்வு இல்லை என்றால் $a = b = c = 1$ என்றும் (ii) பல தீர்வுக்கணங்கள் உண்டென்றால் $a = c = 1$, $b = 2$ என்றும் நிறுவுக.

(4) $ax-2y+z = 1$, $x-2ay+z = 2$, $x-2y+az = 1$ என்ற சமன் பாடுகளுக்கு (i) ஒரே தீர்வுக் கணம் உண்டு (ii) பல தீர்வுக் கணங்கள் உண்டு. (iii) தீர்வு இல்லை ஆகிய மூன்று வகைகளுக்கான a-ன் மதிப்புகளைக் காண்க. [Madurai B.E., '70]

VI. (a) $x + 2y - z = 3$, $3x - y + 2z = 1$
$2x - 2y + 3z = 2$, $x - y + z = -1$

ஆகிய சமன்பாடுகள் இசைவுடையன என நிறுவுக. [B.Tech '70]

(b) $$\frac{cy + bz}{b - c} = \frac{az + cx}{c - a} = \frac{bx + ay}{a - b} = \frac{ax + by + cz}{a+b+c}$$

என்ற சமன் பாடுகள் இசைவுடையன என்றால் $a + b + c = 0$ அல்லது $(a-b)(b-a)(c-a) = abc$ என நிறுவுக. [B.Tech '72]

(c) $x+y+2z = a,\quad x+3y-2z = b,\quad 5x+7y+6z = c$ என்ற சமன்பாடுகள் இசைவுடையன என்றால் $c = 4a+b$ என நிறுவுக. [B.E., '72]

VII. (a) ஓரணியின் அளவையின் வரைவிலக்கணம் யாது? $AX = B$ என்னும் ஒருங்கைச் சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வுகள் உண்டெனில், A-ன் அளவையும், $[A \mid B]$ என்னும் கூட்டிய அணியின் அளவையும் சமமாதல் வேண்டும் என நிறுவுக.

(b)
$$\begin{aligned} x - 3y + 2z &= 4 \\ 2x + y - z &= 1 \\ 3x - 2y + z &= \alpha \end{aligned}$$

என்னும் சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வுகள் உண்டெனில் α-வின் மதிப்பைக் காண்க. [B.E. '74]

விடைகள்

I. (1) $x = 3,\ y = 5,\ z = 6$
(2) $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$
(3) $x = -1,\ y = 4,\ z = 4$
(4) $x = 1,\ y = -1,\ z = 2$
(5) $x = 4,\ y = -1,\ z = 2$
(6) $x = 2,\ y = 1,\ z = 3$
(7) $x = \frac{1}{2},\ y = 2,\ z = \frac{1}{2}$

II. (1) $x = \frac{1}{2},\ y = \frac{3}{2},\ z = \frac{5}{2}$
(2) $x = 1,\ y = 3,\ z = 3$
(3) $x = -1,\ y = 4,\ z = 4$
(4) $x = 1,\ y = 0,\ z = 1$
(5) $x = 2,\ y = 1,\ z = -1$

IV. (1) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda' \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, λ ஏதாவதோர் எண்ணி

(2) $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 11 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$ λ ஏதாவதோர் எண்ணி

(3) $$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix},$$ λ ஏதாவதோர் எண்ணி

(4) $$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$ λ ஏதாவதோர் எண்ணி

(5) $$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{11} \\ \frac{3}{11} \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -16 \\ 1 \\ 11 \end{bmatrix},$$ λ ஏதாவதோர் எண்ணி

(6) $x = -\frac{1}{3}, \quad y = -3, \quad z = -\frac{11}{3}$

(7) $$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{16}{3} \\ \frac{16}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -9 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

(8) $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \lambda_3 \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

V. (1) $k = 1, -2$ (2) (i) $k \neq 1, -2$ (ii) $k = 1$ (தீர்வு இல்லை என்றால் $k = -2$)

(4) (i) $a \neq 1, -2$ (ii) $a = -2$ (iii) $a = 1$

VII. (b) $\alpha = 5$

§ 41. n **தெரியாக் கணியங்கள் கொண்ட சமபடித்தான m ஒருங்கைச் சமன்பாடுகள்.**

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= 0 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &= 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad &\dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n &= 0 \end{aligned}$$

மேற்கண்ட சமன்பாடுகளின் குணக அணி

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ என்பது (m, n) தரமுள்ள அணி

மேலும் $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $[O] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ என்றால்

அந்தச் சமன்பாடுகளை $AX = [O]$ ... (1)

என்ற அணிச் சமன்பாடாக எழுதலாம்.

A-ன் அளவையும் $[A \mid O]$-ன் அளவையும் எப்போதும் சமமாகும். எனவே சமன்பாடு (1) எப்போதும் இசைவுடையதாகவே இருக்கும் என்பது தெளிவாகிறது (§ 39).

A-ன் அளவை r என்று வைத்துக் கொள்வோம்.

§ 41.1. தேற்றம்

சமன்பாடு (1) [§40]-க்கு $(n-r)$ ஒருபடித் தொடர்பிலா தீர்வுக்கணங்கள் உண்டாகும்.

A-ன் அளவை r என்பதால், A-ன் r நிரல்கள் ஒருபடித் தொடர்பிலாதவை ஆகும் (§ 38·1). விளக்கம் எளிதாக்கும் பொருட்டு முதல் r நிரல்கள்

$$C_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots, C_r = \begin{bmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \cdots \\ a_{mr} \end{bmatrix}$$

ஒருபடித் தொடர்பிலாதவை என்போம்.

எனவே, $C_{r+1} = \begin{bmatrix} a_{1,\,r+1} \\ a_{2,\,r+1} \\ \cdots \\ a_{m,\,r+1} \end{bmatrix}, \ldots, C_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$

ஆகிய $(n-r)$ நிரல்களில் ஒவ்வொன்றையும் $C_1, C_2, \ldots C_r$ என்னும் r நிரல்களில் ஒருபடிச் சேர்மானமாக எழுதலாம்.

$$\therefore \quad C_{r+1} = \lambda_{11} C_1 + \lambda_{12} C_2 + \dots + \lambda_{2r} C_r$$
$$C_{r+2} = \lambda_{21} C_1 + \lambda_{22} C_2 + \dots + \lambda_{2r} C_r$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$
$$C_n = \lambda_{p1} C_1 + \lambda_{p2} C_2 + \dots + \lambda_{pr} C_r$$

(இங்கே $p = n - r$, λ-கள் மாறிலிகள்)

மேற்கண்ட $(n-r)$ சமன்பாடுகளைப் பின்வருமாறு மாற்றி எழுதலாம் :

$$\lambda_{11} C_1 + \lambda_{12} C_2 + \dots + \lambda_{1r} C_r - C_{r+1} + 0 \cdot C_{r+2} + \dots + 0 \cdot C_n = 0 \quad \text{—II (1)}$$

$$\lambda_{21} C_1 + \lambda_{22} C_2 + \dots + \lambda_{2r} C_r + 0 \cdot C_{r+1} + \dots + 0 \cdot C_n = 0 \quad \text{—II (2)}$$

$$\lambda_{p1} C_1 + \lambda_{p2} C_2 + \dots + \lambda_{pr} C_r + 0 \cdot C_{r+1} + \dots - C_n = 0 \quad \text{—II } (p)$$

ஆனால், கொடுத்துள்ள சமன்பாடு (1) ஐ

$$x_1 C_1 + x_2 C_2 + \dots + x_r C_r + x_{r+1} C_{r+1} + \dots x_n C_n = 0 \quad \dots \quad (3)$$

என்றும் மாற்றி எழுதலாம். [§ 19-12]

இப்போது, சமன்பாடு II (1) ஐயும் (3) ஐயும் ஒப்பிட்டு நோக்கினால்

$$x_1 = \lambda_{11}, \quad x_2 = \lambda_{12} \dots x_r = \lambda_{1r}, \quad x_{r+1} = -1,$$
$$x_{r+2} = 0, \quad x_{r+3} = 0, \quad \dots \quad \dots \quad x_n = 0$$

அதாவது,
$$X = X_1 = \begin{bmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{12} \\ \vdots \\ \lambda_{1r} \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$ என்பது

சமன்பாடு (1)-ன் தீர்வுக்கணம் என்பது தெளிவாகும்.

இதேபோல், சமன்பாடு II (2) ஐயும் (3) ஐயும் ஒப்பிட்டு நோக்கினால்,

$$X = X_2 = \begin{bmatrix} \lambda_{21} \\ \lambda_{22} \\ \vdots \\ \lambda_{2r} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

என்பது சமன்பாடு (1)-ன் மற்றொரு தீர்வுக்கணமாகும்

$$\text{இதேபோல்: } X_3 = \begin{bmatrix} \lambda_{31} \\ \lambda_{32} \\ \vdots \\ \lambda_{3r} \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \; \ldots \ldots, X_p = (X_{n-r}) = \begin{bmatrix} \lambda_{p1} \\ \lambda_{p2} \\ \vdots \\ \lambda_{pr} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

என்பவைகளும் சமன்பாடு (1)-ன் தீர்வுக்கணங்கள் என்று புலனாகிறது. எனவே, $X_1, X_2, \ldots X_{n-r}$ என்ற $(n-r)$ வெக்டர்கள் சமன்பாடு (1)-ன் $(n-r)$ தீர்வுக்கணங்களைக் குறிக்கும்.

இப்போது, $k_1X_1 + k_2X_2 + \ldots + k_{n-r}X_{n-r} = [0]$ ... (4)
என்ற வெக்டர் சமன்பாட்டை ஆராய்வோம்.

(4)-ன் இரு பக்கங்களிலும் முறையே $(r+1)$ ஆவது மூலகங்களை ஒப்பிட்டு நோக்கினால்

$$k_1(-1) + k_2 \cdot 0 + k_3 \cdot 0 + \ldots + k_{n-r} \cdot 0 = 0$$

இதேபோல் முறையே $(r+2)$ ஆவது மூலகங்களை ஒப்பிட்டு நோக்கினால்

$$k_1 \cdot 0 + k_2(-1) + k_3 \cdot 0 + \ldots + k_{n-r} \cdot 0 = 0$$

$$\therefore \quad k_2 = 0$$

இவ்வாறே, $k_3 = 0 = k_4 = \ldots k_{n-r} = k_1 = k_2$ எனவே, X_1, X_2, X_{n-r} ஆகிய $(n-r)$ வெக்டர்கள் ஒருபடித் தொடர்பிலாதவை.

இப்போது $X_1, X_2, \ldots X_{n-r}$ என்ற $(n-r)$ ஒருபடித் தொடர்பிலா தீர்வு வெக்டர்களைத் தவிர வேறு எந்த ஒரு தீர்வு வெக்டரும் மேற்படி $(n-r)$ தீர்வுக்கணங்களின் சேர்மானம்தான் என்று நிறுவுவோம்.

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_r \\ y_{r+1} \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix}$$ என்பது ஒரு புதிய தீர்வு வெக்டர்

எனக் கொள்வோம்

X_a, X_b என்பவை (1)-ன் இரண்டு தீர்வு வெக்டர்கள் என்றால், $A\,X_a = 0$ மற்றும் $A\,X_h = 0$. எனவே, $A\,(kX_a + lX_b) = 0$ (k, l ஏதாவது எண்ணிகள் அதாவது, $kX_a + l\,X_b$-ம்

(1)-ன் தீர்வு வெக்டர் ஆகும். இதே கோட்பாட்டின்படி $Y, X_1, X_2, \dots X_{n-r}$ ஆகியவை (1)-ன் தீர்வு வெக்டர்கள் என்பதால் அவற்றின் ஒருபடிச் சேர்மானத்தில் கிடைக்கும்.

$Z \equiv Y + y_{r+1} X_1 + y_{r+2} X_2 + \dots + y_n X_{n-r}$ என்ற வெக்டரும் (1)-ன் தீர்வு வெக்டர் ஆகும்.

இப்போது,

$$Z \equiv \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \\ y_{r+1} \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + y_{r+1} \begin{bmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{12} \\ \vdots \\ \lambda_{1r} \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + y_{r+2} \begin{bmatrix} \lambda_{21} \\ \lambda_{22} \\ \vdots \\ \lambda_{2r} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \dots + y_n \begin{bmatrix} \lambda_{p1} \\ \lambda_{p2} \\ \vdots \\ \lambda_{pr} \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \\ z_{r+1} \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$$ என்க.

$\therefore \; z_{r+1} = 0 \; z_{r+2} = \dots \; \dots = z_n$ என்பது தெளிவாகிறது.

இப்போது, $Z \equiv \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ என்ற வெக்டர்

(1)-ன் தீர்வு வெக்டர் என்பதால் சமன்பாடு (3)-லிருந்து

$$z_1 C_1 + z_2 C_2 + \ldots + z_r C_r + 0 \cdot C_{r+1} \ldots + 0 \cdot C_n = 0$$

ஆனால், $C_1, C_2, \ldots C_r$ என்பவை ஒருபடித் தொடர்பிலா நிரல் வெக்டர்கள்.

$$\therefore \quad z_1 = 0, \; z_2 = 0, \ldots z_r = 0$$

எனவே, $Z \equiv [0]$

$$\therefore \quad Y = -[y_{r+1} X_1 + y_{r+2} X_2 + \ldots + y_n X_{n-r}]$$

மேற்கூறிய விளக்கத்திலிருந்து பின்வரும் உண்மை விளங்குகிறது:

$AX = [0]$ என்னும் n தெரியாக் கணியங்கள் கொண்ட சமபடி ஒருங்கைச் சமன்பாடுகளின் குணக அணியின் அளவை r என்றால், $(n-r)$ ஒருபடித் தொடர்பின் தீர்வு வெக்டர் $X_1, Y_2, \ldots Z_{n-r}$ கிடைக்கப் பெறும். மேலும் அந்தச் சமன்பாடுகளின் பொதுத் தீர்வு, $(n-r)$ துணையலகுகள் (parameters) உடைய

$Y = \mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + \ldots + \mu_{n-r} X_{n-r}$ ஆகும். இங்கே $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{n-r}$ என்பவை ஏதாவது எண்ணிகள் (arbitrary scalars).

§ 42. துணை முடிவுகள்

§ **42·1.** A-ன் அளவை = தெரியாக் கணியங்களின் எண்ணிக்கை (அதாவது $r = n$) என்றால் $n - r = 0$. எனவே, சமன்பாடு (1)-க்கு ஒருபடித் தொடர்பிலாத் தீர்வு கிடையாது. அதாவது, (1)-க்கு அற்பமான (trivial) தீர்வுதான் உண்டு.

§ **42·2.** சமன்பாடுகளின் எண்ணிக்கை தெரியாக் கணங்களின் எண்ணிக்கையை விடக் குறைவு

(அதாவது, $m < n$) என்ருல்

$$r \leq m < n$$

$\therefore$ (1)-க்கு அற்பமல்லாத தீர்வுகள் உண்டாகும்.

§ **42·3.** சமன்பாடுகளின் எண்ணிக்கை தெரியாக் கணியங்களின் எண்ணிக்கைக்குச் சமம் (அதாவது $m = n$) என்போம். A ஒரு (n, n) சதுர அணி.

$|A| \neq 0$ என்ருல், $r = m = n$

$\therefore$ (1)-க்கு அற்பமான தீர்வு தான உண்டு.

மாருக, $|A| = 0$ என்ருல், அதாவது $r < n = m$ என்ருல் அற்மமல்லாத தீர்வுகள் உண்டாகும்.

§ **43.** n **தெரியாக் கணங்கள் கொண்ட n ஒருபடித்தான சமன்பாடுகளின் அற்பமல்லாத திர்வு காணல்.**

விளக்கம் எளிதாக அமைவதற்காக 3 தெரியாக் கணியங்கள் உடைய 3 சமப்படித்தான ஒருபடிச் சமன்பாடுகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \quad \dots \quad (1)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \quad \dots \quad (2)$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \quad \dots \quad (3)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad [0] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

என்ருல், மேற்கண்ட 3 சமன்பாடுகள் $AX = [0]$ என்ற வடிவம் பெறும்.

$|A| \pm 0$ என்ருல், A^{-1} ஐக் காண இயலும்.

$\therefore \quad A^{-1}AX = A^{-1}[0] = [0]$

அதாவது, $IX = [0]$ அல்லது $X = [0]$

எனவே $|A| \pm 0$ என்ருல், $x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0$ என்ற அற்பத்தீர்வுதான் உண்டு. ஆனுல் $|A| = 0$ என்ருல் அற்பமல்லாத தீர்வுகளும் உண்டு.

அற்பமல்லாத தீர்வுகள் காணும் முதல் முறை :

அற்பமல்லாத தீர்வுக்கான நிபந்தனை

$$|A| = 0 \qquad \ldots \qquad (5)$$

$|A|$ -ல் a_{rs}-ன் இணைக்காரணியை A_{rs} என்று குறிப்போம். k என்பது ஏதாவதோர் எண்ணி என்றால்,

$$Y_1 = k \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{13} \end{bmatrix} \qquad \ldots \qquad (6)$$

என்ற வெக்டர் (4)-ன் ஒரு தீர்வு வெக்டராக இருக்க முடியுமா என்று ஆராய்வோம்.

$$x_1 = kA_{11}, \quad x_2 = kA_{12}, \quad x_3 = A_{13} \qquad \ldots \qquad (7)$$

என்று சமன்பாடு (1)-ல் பிரதியிட்டால்

$$a_{11}\, kA_{11} + a_{12}\, kA_{12} + a_{13}\, kA_{13} = 0$$

அதாவது, $k\{a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}\} = 0$

அதாவது, $k\,|A| = 0$ (§ 5·3)

(5)-லிருந்து இந்தச் சமன்பாடு சமனடைவது தெளிவாகிறது.

(7) ஐ (2)-ல் பிரதியிட்டாலும், (3)-ல் பிரதியிட்டாலும் அவை சமனடையும்.

எனவே, Y_2 என்ற வெக்டர் (4)-ன் ஓர் அற்பமல்லாத தீர்வு வெக்டர் ஆகும். — A_{11}, A_{12}, A_{13} ஆகிய மூன்று கணியங்களும் சூழியல்லாத போது.

இதே போல், $Y_2 = k \begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{22} \\ A_{23} \end{bmatrix}$, $Y_3 = k \begin{bmatrix} A_{31} \\ A_{32} \\ A_{33} \end{bmatrix}$

என்பவைகளும் (4)-ன் அற்பமல்லாத தீர்வு வெக்டர்களாகும்.

[குறிப்பு : k என்பது ஏதாவதோர் எண்ணி என்பதால் எண்ணிலடங்காத் தீர்வு வெக்டர்கள் உண்டு என்று தெளிவாகிறது. மேலும், Y_1, Y_2, Y_3 ஆகியவற்றில் ஒரு வெக்டராவது சூழியல்லாமல் இருக்கும்].

இரண்டாவது முறை :

$[A \mid 0]$ என்ற அணியை நிரை முதனிலை மாற்றங்களால்

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{12} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \end{array}\right]$$ என்ற

மேல் முக்கோண அணியாக மாற்ற இயலும்.

(அ) $\alpha_{33} \neq 0$ என்றால், கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகளுக்கு அற்பத் தீர்வுதான் உண்டு.

(ஆ) $\alpha_{33} = 0$ என்றால், கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகள்

$$\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 = 0$$
$$\alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 = 0$$

என்ற இரண்டு சமன்பாடுகளுக்குச் சமானமாகும்.

$$\therefore \quad x_2 = -\frac{\alpha_{23}}{\alpha_{22}} x_3 = \beta_1 x_3$$ என்போம்.

$$x_1 = -\frac{1}{\alpha_{11}} \left\{ \alpha_{12} \beta_1 x_3 + \alpha_{13} x_3 \right\}$$

$$= \beta_2 x_3$$ என்க.

அதாவது, $x_1 = \beta_1 \lambda, \; x_2 = \beta_2 \lambda, \; x_3 = \lambda$

(இங்கே λ ஏதாவதோர் எண்ணி)

அல்லது, $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$ என்பது கொடுத்துள்ள

சமன்பாடுகளின் பொதுத் தீர்வு வெக்டர் ஆகும். இது λ என்ற ஒரு துணையலகுடைய தீர்வு வெக்டர் ஆகும்.

(இ) $\alpha_{22} = \alpha_{23} = \alpha_{33} = 0$ என்றால் கொடுத்துள்ள மூன்று சமன்பாடுகள்

$\alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \alpha_{13} x_3 = 0$ ஒன்ற ஒரேவொரு சமன்பாட்டுக் குச் சமானமாகும்.

இதை $x_2 = \lambda$, $x_3 = \mu$, $x_1 = -\alpha_{12}\lambda - \alpha_{13}\mu$ என்று எழுதலாம்.

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -\alpha_{12} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} -\alpha_{13} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

இங்கே λ, μ ஏதாவது எண்ணிகள்.

இது λ, μ என்ற இரண்டு துணையலகுகள் உடைய பொதுத் தீர்வு வெக்டர் ஆகும்.

மாதிரிக்கணக்கு (1)

$x - y + z = 0$, $2x + y - z = 0$, $x + 5y - 5z = 0$ என்ற சமபடிச் சமன்பாடுகளின் பொதுத் தீர்வு காண்க.

இங்கே,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & -5 \end{bmatrix}, \quad |A| = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

இப்போது, $$|A| = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{pmatrix} R_2 \to R_2 - 2R_1; \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \quad A_{11} = 0, \quad A_{12} = 0, \quad A_{13} = 0$$
$$A_{21} = 0, \quad A_{22} = -6, \quad A_{23} = -6$$
$$A_{31} = 0, \quad A_{32} = 3, \quad A_{33} = 3$$

எனவே, பொதுத் தீர்வு $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, k ஏதாவதோர் எண்ணி

மாற்று வழி

$$[A \mid O] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 0 \end{array}\right] \quad (R_2 \to R_2 - 2R_1; \; R_3 \to R_3 - R_1)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad (R_2 \to \tfrac{1}{3} R_2; \; R_3 \to R_3 - 2R_2)$$

A-ன் அளவை $= 2$, தெரியாக் கணியங்களின் எண்ணிக்கை $= n \quad \therefore \quad n - r = 3 - 2 = 1$

எனவே, ஒரு துணையலகுடைய பொதுத்தீர்வு உண்டாகும்.

கொடுத்த சமன்பாடுகள், பின் வரும்

$$x - y + z = 0$$
$$y - x = 0$$

என்ற இரண்டுச் சமன்பாடுகளுக்குச் சமானமாகும்.

$$\therefore \quad y = z \text{ ; மற்றும் } x = 0$$

அல்லது $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, k ஏதாவதோர் எண்ணி

மாதிரிக்கணக்கு (2)

$$\begin{aligned} 3x + y - \lambda z &= 0 \\ 4x - 2y - 3z &= 0 \\ 2\lambda x + 4y + \lambda z &= 0 \end{aligned}$$

என்பவை அற்பமல்லாத தீர்வுகளைப் பெற வேண்டுமானால், λ-ன் மதிப்புகளைக் காண்க. λ-ன் மதிப்புகளுக் கேற்பச் சமன்பாடுகளின் பொதுத் தீர்வுகளையும் காண்க. [M.Sc., '71]

கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகள் அற்பமல்லாத தீர்வுகளைப் பெற வேண்டுமானால்; அவற்றின் குணக அணிகோவை பூச்சியமாக வேண்டும்.

அதாவது, $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -\lambda \\ 4 & -2 & -3 \\ 2\lambda & 4 & \lambda \end{vmatrix} = 0$

அதாவது, $3(-2\lambda+12)-(4\lambda+6\lambda)-\lambda(16+4\lambda) = 0$

$\lambda^2+8\lambda-8 = 0$ அதாவது, $(\lambda+9)(\lambda-1) = 0$

$$\therefore \lambda = 1, -9$$

வகை (1) : $\lambda = 1$

கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகளில் $\lambda = 1$ எனப் பிரதியிட்டால்

$$\begin{aligned} 3x + y - z &= 0 \\ 4x - 2y - 3z &= 0 \\ 2x + 4y + z &= 0 \end{aligned}$$

$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ என்றால்,

$$[A \mid O] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 4 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{10}{3} & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{5}{3} & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} (R_2 \to R_2 - 4R_1; \\ R_3 \to R_3 - 2R_1) \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{10}{3} & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] (R_3 \to R_3 + R_2)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \left(\begin{array}{l} R_1 \to 3R_1; \\ R_2 \to -\frac{3}{5} R_2 \end{array}\right)$$

A–ன் அளவை $= 2$; தெரியாக் கணியங்களின் எண்ணிக்கை $= 3$ $\therefore$ $3 - 2 = 1$ துணையலகு கொண்ட பொதுத் தீர்வு உண்டு.

கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகள் பின்வரும் வடிவம் பெறும் :

$$3x + y - z = 0$$

$$2y + z = 0$$

$$\therefore \quad y = -\frac{1}{2} z; \quad x = \frac{1}{3}(z - y) = \frac{1}{2} z$$

அதாவது, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \\ +2 \end{bmatrix}$, k ஏதாவதோர் எண்ணி.

வகை (2): $\lambda = -9$

கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகளின் $\lambda = -9$ எனப் பிரதியிட்டால்,

$$\begin{aligned} 3x + y + 9z &= 0 \\ 4x - 2y - 3z &= 0 \\ -18x + 4y - 9z &= 0 \end{aligned}$$

இப்போது, $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 4 & -2 & -3 \\ -18 & 4 & -9 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

என்றால், $[A \mid O] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 9 & 0 \\ 4 & -2 & -3 & 0 \\ -18 & 4 & -9 & 0 \end{array}\right]$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{3} & 3 & 0 \\ 0 & -\frac{10}{3} & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 45 & 0 \end{array}\right] \begin{pmatrix} R_1 \to \frac{1}{3} R_1 ; \\ R_2 \to R_2 - \frac{4}{33} R_1 ; \\ R_3 \to R_3 + 6R_1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 10 & 45 & 0 \\ 0 & 10 & 45 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} (R_1 \to 3R_1) \\ (R_2 \to -3R_2) \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \left(R_2 \to \frac{1}{5} R_2 ; \quad R_3 \to R_3 - R_2\right)$$

கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகள்

$$3x + y + 9z = 0$$
$$2y + 9z = 0$$

என்ற வடிவம் பெறும்.

$$\therefore \quad y = -\frac{9}{2} z ; \quad x = \frac{1}{3}(-y - 9z) = -\frac{3}{2} z$$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ -2 \end{bmatrix}$$, k ஏதாவதோர் எண்ணி

மாதிரிக்கணக்கு (3)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 2x_1 \quad\quad + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

என்ற சமன்பாடுகளின் பொதுத்தீர்வு காண்க.

இங்கே, $[A \mid O] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right] \left(R_2 \to R_2 - R_1; \quad R_3 \to R_3 - 2R_1\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] (R_3 \to R_3 + R_2)$$

A-ன் அளவை $= r = 2$; தெரியாக் கணியங்களின் எண்ணிக்கை $n = 4$.

$\therefore$ $n - r = 2$ துணையலகுகளுடைய பொதுத்தீர்வு உண்டாகும்.

கொடுத்துள்ள 3 சமன்பாடுகள் பின்வரும் 2 சமன்பாடுகளுக்குச் சமானமாகும்.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0$$

$$\therefore \quad x_2 = -\frac{1}{2} x_3 - \frac{3}{2} x_4$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} x_3 + \frac{1}{2} x_4$$

அல்லது
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

இங்கே, λ, μ ஏதாவது எண்ணிகள்.

§ 44. தேற்றம்

$AX = B$ என்ற சமபடியல்லாத ஒருபடி ஒருங்கைச் சமன்பாடுகளின் ஒரு குறிப்பிட்ட (particular) தீர்வு வெக்டர் X_p என்போம். $AX = [0]$ என்ற சமபடித்தான ஒருபடி ஒருங்கைச் சமன்பாடுகளின் பொதுத் தீர்வு வெக்டர்

$X_h = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3 + \dots + C_k X_k$ என்றால், $AX = B$-ன் பொதுத்தீர்வு வெக்டர் $X_h + X_p$ ஆகும்.

நிறுவல் : $AX = B$ ... (1)

$AX = [0]$ ... (2)

இப்போது X_p என்பது (1)-ன் ஒரு குறிப்பிட்ட தீர்வு வெக்டர் என்பதால் $AX_p = B$ ... (3)

X_a என்பது (1)-ன் ஏதாவது ஒரு தீர்வு வெக்டர் எனில்,

$AX_a = B$ ... (4)

(4)–(3) : $A(X_a - X_p) = 0$ ... (5)

(2) ஐயும் (5) ஐயும் ஒப்பிட்டு நோக்கினால் $X_a - X_p$ என்பது (2)-ன் ஒரு தீர்வு வெக்டராகும். ஆனால் § 41·1-ல் விளக்கியபடி $X_a - X_p$ என்ற (2)-ன் தீர்வு வெக்டர் X_h-ன் மற்றொரு வடிவமாகத் தான் இருக்க முடியும்.

$\therefore \quad X_a - X_p = X_h$

அதாவது, $X_a = X_h + X_p$ ... (6)

எனவே, (1)-ன் எந்த ஒரு தீர்வு வெக்டரையும் "(2)-ன் பொதுத் தீர்வு வெக்டர் + (1)-ன் ஒரு குறிப்பிட்ட வெக்டர்" என எழுதலாம் என்று தெளிவாகிறது.

[குறிப்பு (1) : A-ன் அளவை $=[A \mid B]$-ன் அளவை $= r < n$ (= தெரியாக் கணியங்களின் எண்ணிக்கை) என்றால், (1)-ன் பொதுத் தீர்வு வெக்டரில் $(n - r)$ துணையலகுகள் உண்டாகும்.

(2) § 43, 44 ஆகியவற்றை இணைத்துக் கூர்ந்து நோக்கினால் ஒருபடிச் சமன்பாட்டுத் தொகுதிக்கும், மாறா எண்ணிகளைக் குணகங்களாகக் கொண்ட ஒருபடி வகைக் கெழுச் சமன்பாடுகளுக்கும் (Linear Differential Equations with constant Coefficients) தீர்வு காணும் முறையில் மிகுந்த ஒற்றுமை இருப்பதை உணரலாம்.]

மாதிரிக்கணக்கு (4)

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 5x_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

என்ற சமபடித்தான சமன்பாடுகளின் பொதுத் தீர்வு காண்க. இதைப் பயன்படுத்தி

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 10 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (\mathrm{II})$$

என்ற சமபடியல்லாத சமன்பாடுகளின் பொதுத் தீர்வு காண்க.

II-ன் குணக அணி A, மாறு உறுப்பு அணி B என்போம்.

$$[A \mid O] = \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} (R_2 \to R_2 - R_1 ; \\ R_3 \to F_3 - 2R_1) \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \quad (R_3 \to R_3 - R_2)$$

$\therefore$ A–ன் அளவை 3, தெரியாக் கணியங்கள் 4.

$\therefore$ (I)-க்கு $4 - 3 = 1$ துணையலகுடைய பொதுத்தீர்வு உண்டாகும்.

(I) ஐப் பின்வருமாறு எழுதலாம் :

$$\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{array}$$

$$\therefore \quad x_4 = 0, x_2 = -4x_3, x_1 = 11x_3$$

அல்லது $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 11 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, λ ஏதாவதோர் எண்ணி

இது (I)-ன் பொதுத் தீர்வு ஆகும்.

இப்போது (II)-ன் ஒரு குறிப்பிட்ட தீர்வு காண்போம். இதற்காக $x_4=0$ எனக்கொள்வோம் (x_1, x_2, x_3, x_4 இவற்றில், ஏதாவது ஒன்றுக்கு சுழி எனக் கொண்டால் போதும்.)

$$\begin{aligned} \therefore\quad x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 6 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 10 \end{aligned}$$

இவற்றின் தீர்வு: $x_1 = 10$, $x_2 = -2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ இது (II)-ன் ஒரு குறிப்பிட்ட தீர்வு.

∴ §44-ல் விளக்கியபடி, (II)-ன் பொதுத் தீர்வு, "(I)-ன் பொதுத் தீர்வு + (II)-ன் ஒரு குறிப்பிட்ட தீர்வு."

அதாவது, $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 11 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

பயிற்சி 6 (b).

1. கீழ்வரும் சமபடித்தான் சமன்பாடுகளுக்கு அற்பத்தீர்வுகள் தான் உண்டு என நிறுவுக:

(1)
$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 0 \\ 2x - 3y - z &= 0 \\ 4x - y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ 3x + 4x + 4z &= 0 \\ 7x + 10y + 12z &= 0 \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned} 2x+3y- z- w &=0 \\ x- y-2z-4w &=0 \\ 3x+ y+3z-2w &=0 \\ 6x+2y \quad -7w &=0 \end{aligned}$$

(5)
$$\begin{aligned} x + 2y - 3z + 4t + u &= 0 \\ x \quad - z + t + u &= 0 \\ 3x - y + z \quad - u &= 0 \\ -x + y \quad + 2t + 9u &= 0 \\ 3x + y \quad + 3t + 9u &= 0 \end{aligned}$$

II. கீழ்க்கண்ட சமபடித்தான சமன்பாடுகளின் பொதுத் தீர்வுகளைக் காண்க :

(1) $2x + 3y - z = 0$
$3x + 4y + 2z = 0$
[B. Tech. '71]

(2) $x - 2y + 3z = 0$
$2x + 5y + 6z = 0$

(3) $2x - y + 3z = 0$
$3x + 2y + z = 0$
$x - 4y + 5z = 0$

(4) $x + 3y - 2z = 0$
$2x - y + 4z = 0$
$x - 11y + 14z = 0$

(5) $x - y + 2z - 3w = 0$
$3x + 2y - 4z + w = 0$
$5x - 3y + 2z + 6w = 0$

(6) $x - 2y + z - w = 0$
$x + y \quad 2z + 3w = 0$
$4x + y - 5z + 8w = 0$
$5x + 7y + 2z + w = 0$

(7) $x + y - z + w = 0$
$x - y + 2z - w = 0$
$3x + y \quad + w \quad 0$

(8) $4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$
$2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0$
$7x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 0$
$2x_1 - 11x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 0$

III. (1) $x + 2y + 3z = \lambda x$
$3x + y + 2z = \lambda y$
$2x + 3y + z = \lambda z$

ஆகிய சமன்பாடுகள் அற்பமல்லாத தீர்வு பெறவேண்டுமானால், $\lambda = 6$ என நிறுவுக.

(2) $(1-\lambda) x + 2y + 3z = 0$
$3x - 5y + 2z = 0$
$2x + 3y - 5z = 0$

என்ற சமன்பாடுகள் அற்பமல்லாத தீர்வு பெறவேண்டுமானால், λ-ன் மதிப்புக் காண்க.

IV. கீழ்க்காணும் சமபடியல்லாத சமன்பாடுகளில் முதலில் வலப் பக்கம் சுழியாக எடுத்துக்கொண்டு கிடைக்கும் சமபடித்தான சமன்பாடுகளின் பொதுத் தீர்வு காண்க. இதைப் பயன்படுத்திக் கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகளின் பொதுத் தீர்வு காண்க.

(1) $x - 2y + 3z = 4$
$x + y + 2z = 5$

(2) $x_1 + x_2 + x_3 = 4$
$2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 3$

(3) $5x + 3y + 7z = 4$
$3x + 26y + 2z = 9$
$7x + 2y + 10z = 5$

(4) $x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 1$
$2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 2$
$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 = 3$

விடைகள்

II. (1) $\lambda \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 17 \end{bmatrix}$ (2) $\lambda \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

(3) $\lambda \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (4) $\lambda \begin{bmatrix} 10 \\ -8 \\ 7 \end{bmatrix}$

(5) $\lambda \begin{bmatrix} 4 \\ 26 \\ 17 \\ 4 \end{bmatrix}$ (6) $\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(7) $\lambda \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(8) $\lambda \begin{bmatrix} -\frac{5}{8} \\ 1 \\ \frac{7}{4} \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} \frac{3}{8} \\ 0 \\ -\frac{5}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$

III. (2) $\lambda = 6$

IV. (1) $\lambda \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \lambda \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(2) $\lambda \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{17}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$

(3) $\lambda \begin{bmatrix} -\frac{16}{11} \\ \frac{1}{11} \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda \begin{bmatrix} -\frac{16}{11} \\ \frac{1}{11} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{7}{11} \\ \frac{3}{11} \\ 0 \end{bmatrix}$

(4) $\lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$+ \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

7. ஒருபடி நிலைமாற்றங்களும், தனித்தன்மை மூலங்களும்

(Linear transformations and Eigen Values)

§ 45. வரைவிலக்கணம்

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ என்பது $x_1, x_2, \dots x_n$ என்னும்

n மாறிகளைக்கொண்ட கொடுத்துள்ள ஒரு வெக்டரைக் குறிக்கட்டும். a_{ij} $(i, j = 1, 2, \dots n)$ என்னும் n^2 மாறு எண்ணிகளும் கொடுக்கப்பட்டவைகளாக எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots & \quad \dots \qquad\qquad \dots \quad \dots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{aligned}\right\} \quad \dots \quad (1)$$

என்ற n ஒருபடிச் சமன்பாடுகளிலிருந்து கிடைக்கப் பெறும் $y_1, y_2, \dots y_n$ என்னும் n மாறிகளை மூலகங்களாகக் கொண்டுள்ள

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$ என்ற புதிய வெக்டரை,

கொடுத்துள்ள வெக்டர் X-லிருந்து ஒருபடி நிலைமாற்றத்தால் கிடைத்துள்ள வெக்டர் என்று கூறுவர்.

சமன்பாடுகள் (1), ஒருபடி நிலைமாற்றச் சமன்பாடுகள் என வழங்கப்படும்.

சமன்பாடுகள் (1)-ல், $n = 2$, $a_{11} = \cos\theta$, $a_{12} = \sin\theta$ $a_{21} = -\sin\theta$, $a_{22} = \cos\theta$ என்றால்,

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \cos\theta \cdot x_1 + \sin\theta \cdot x_2 \\ y_2 &= -\sin\theta \cdot x_1 + \cos\theta \cdot x_2 \end{aligned}\right\} \quad \dots \quad (2)$$

இப்போது OX_1, OX_2 என்ற இரு செங்குத்து அச்சுகளைக் குறித்து P என்ற புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் (co-ordinates) (x_1, x_2) எனக் கொள்வோம். OX_1, OX_2 என்ற அச்சுகளை θ கோணம் வரை சுழற்றி முறையே OY_1, OY_2 என்ற புதிய அச்சுகளைப் பெறுவோம். OY_1, OY_2 என்ற புதிய அச்சுகளைக் குறித்து P-ன் புதிய ஆயத்தொலைகள் (y_1, y_2) என்றால், சமன்பாடுகள் (2), (x_1, x_2) (y_1, y_2) என்ற ஆயத் தொலைகளின் தொடர்பைக் குறிக்கும் என்று ஆயத் தொலை வடிவக் கணிதம் (Analytical Geometry) மூலம் நாம் அறிவோம். எனவே, சுழற்சியால் ஆன அச்சு மாற்றம் ஒருபடி நிலைமாற்றத்தைக் குறிக்கும் எனத் தெளிவாகிறது.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ என்றால்,}$$

(1)-ல் உள்ள n சமன்பாடுகளையும் சுருக்கமாக

$$Y = AX \quad \dots \quad (3)$$

என்ற அணிச் சமன்பாடாக எழுதலாம்.

(3)-ல் உள்ள 'A' ஐ நிலைமாற்ற அணி (Matrix of the transformation) என்றும் $|A|$ ஐ நிலைமாற்ற மட்டு (Modulus of the transformation) என்றும் கூறுவர். $|A| \neq 0$ என்றால், (3) ஒரு பூச்சியமில் கோவை நிலைமாற்றம் (non-singular transformation) ஆகும்.

மேற்கூறிய விளக்கத்திலிருந்து ஒவ்வொரு சதுர அணியும் ஒருபடி நிலை மாற்றத்தைக் குறிக்கும் என்பது பெறப்படுகிறது.

(3)-ல் குறித்த நிலைமாற்றம், X என்ற வெக்டரை A என்ற நிலைமாற்ற அணியால் Y என்ற வெக்டருக்கு மாற்றும் முறையை வகுக்கிறது.

இப்போது $|A| \neq 0$, என்றால் A^{-1} ஐக் காணலாம்.

$$\therefore \quad A^{-1}Y = A^{-1}AX = IX = X$$

$$\therefore \quad X = A^{-1}Y \qquad \dots \quad (4)$$

சமன்பாடு (4), Y வெக்டரிலிருந்து X வெக்டருக்கு மாற்றும் முறையைத் தருகிறது.

பொதுவாக (3) ஐ நேர் நிலைமாற்றம் (direct transformation), என்றும், (4) ஐ நேர் எதிர் நிலைமாற்றம் (inverse transformation) என்றும் கூறுவது வழக்கம்.

[குறிப்பு (1): k ஏதாவதொரு மாறு எண்ணி என்றால், (3)-லிருந்து $kY = A(kX)$. அதாவது kX என்ற வெக்டர் kY என்ற வெக்டராக மாறுகிறது.]

(2) a, b என்பவை ஏதாவது மாறு எண்ணிகள் என்றால், $aY_1 = A(aX_1)$, $bY_2 = A(bX_2)$.

$$\therefore \quad aY_1 + bY_2 = A(aX_1 + bX_2).$$

$\therefore \quad aX_1 + bX_2$ என்ற வெக்டர் $aY_1 + bY_2$ என்ற வெக்டராக மாறுகிறது. இதனாலேயே (3)-க்கு ஒருபடி நிலைமாற்றம் என்ற பெயர் வழங்கப் படுகிறது.

§46. இரண்டு அடுத்தடுத்த நிலைமாற்றங்களின் விளைவு (Result of two successive transformations)

$$Y = AX \qquad \dots \quad (1)$$

என்பது X வெக்டரிலிருந்து Y வெக்டருக்கு மாற்றுவதைக் குறிக்கட்டும்.

அவ்வாறே, $Z = BY \qquad \dots \quad (2)$

என்பது Y வெக்டரிலிருந்து Z வெக்டருக்கு மாற்றுவதைக் குறிக்கட்டும். அதாவது, X வெக்டர் Y வெக்டர் வழியாக Z வெக்டராக மாறுகிறது.

இதை $Z = CX \qquad \dots \quad (3)$

என்பதால் குறிக்கலாம்.

(1) ஐ (2)-ல் பிரதியிட்டால்

$$Z = B(AX) = (AB)X \qquad \ldots \quad (4)$$

இப்போது, (3) ஐயும் (4) ஐயும் ஒப்பிட்டால் $C = BA \ (\neq AB)$

அதாவது, (3)-ன் நிலைமாற்ற அணியானது முறையே (2), (1)-களின் நிலைமாற்ற அணிகளின் பெருக்கலுக்குச் சமம் ஆகும்.

எனவே, $Z = BAX$ என்பதை அடுத்தடுத்த இரு நிலைமாற்றங்களின் பெருக்கம் (product of two successive transformations) என்று குறிப்பிடுவதுண்டு.

(x_1, x_2) என்ற இரண்டு மாறிகளை (y_1, y_2) என்ற மாறிகளுக்கு ஒருபடி நிலை மாற்றத்தால் மாற்றி, பின்பு இவற்றை மற்றொரு ஒருபடி நிலைமாற்றத்தால் (z_1, z_2) என்ற மாறிகளுக்கு மாற்றுவதால் ஏற்படும் நிலைமாற்ற அணிகளின் பெருக்கல் எந்த முறையில் அமையும் என்று காண்போம்.

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots \quad (5)$$

மேலும்,
$$\left.\begin{aligned} z_1 &= b_{11}y_1 + b_{12}y_2 \\ z_2 &= b_{21}y_1 + b_{22}y_2 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots \quad (6)$$

(5) ஐ (6)-ல் பிரதியிட்டால்

$$z_1 = b_{11}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + b_{12}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2)$$
$$z_2 = b_{21}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + b_{22}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2)$$

அதாவது,
$$z_1 = (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21})x_1 + (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{12})x_2$$
$$z_2 = (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21})x_1 + (b_{22}a_{21} + b_{22}a_{22})x_2$$

அல்லது
$$z_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2$$
$$z_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2$$

இங்கே, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{2} b_{ik}\,a_{kj}$

ஆகையால், $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

என்ருல்,

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= BA$$

என்று தெளிவாகிறது.

இதிலிருந்து ஒருபடி நிலைமாற்றக் கோட்பாடுகளும் அணிக் கோட்பாடுகளும் மிக நெருங்கிய தொடர்புடையன என்பது தெளிவாகும்.

§ 46. மாதிரிக்கணக்கு

இரு பரிமாண வெளி [அதாவது குறியீட்டு முறையில் $V_2(R)$]–ல் உள்ள (1, 2), (2, 1) என்ற வெக்டர்களை முப்பரிமாண வெளி [$V_3(R)$]–ல் உள்ள முறையே (7, 0, −8), (5, 3, 2) என்ற வெக்டர்வளாக மாற்றும் ஒருபடி நிலைமாற்ற அணி காண்க.

[B.E., '68 Os. 'sity]

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix}, \; Y = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \; X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \; X_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

என்று கொள்வோம்.

நிலைமாற்ற அணி A என்ருல், $Y = AX$. இங்கே Y ஒன்பது ஒரு (3, 1) அணி, X என்பது ஒரு (3, 2) அணியாக இருத்தல் வேண்டும்.

ஆகவே, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$ எனக் குறிப்போம்.

இப்போது, $Y_1 = AX_1$
அதாவது, $\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

மேலும் $Y_2 = AX_2$

அதாவது, $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad a_{11} + 2a_{12} = 7$ ... (1)

$a_{21} + 2a_{22} = 0$ ... (2)

$a_{31} + 2a_{32} = -8$ ... (3)

மேலும், $2\,a_{11} + a_{12} = 5$ ... (4)

$2\,a_{21} + a_{22} = 3$ ... (5)

$2\,a_{31} + a_{32} = 2$ ... (6)

(1), (4) சமன்பாடுகளிலிருந்து $a_{11} = 1$, $a_{12} = 3$

(2), (5) சமன்பாடுகளிலிருந்து $a_{21} = 2$, $a_{22} = -1$

(3), (6) சமன்பாடுகளிலிருந்து $a_{31} = 4$, $a_{32} = -6$

$$\therefore \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$$

பயிற்சி 7 (a).

(1) இரு பரிமாண வெளியில் $[V_2(R)]$-ல் உள்ள (1, 1), (3, — 2) என்ற வெக்டர்களை அதே இரு பரிமாண வெளியில் உள்ள முறையே (2, 1), (1, 2) என்ற வெக்டர்களாக மாற்றும் ஒருபடி நிலைமாற்ற அணி காண்க.

(2) கீழ்வரும் ஒருபடி நிலை மாற்றத்தை அணிச் சமன்பாட்டு வடிவத்தில் எழுதுக. அவ்வணிக்கு நேர் எதிர் நிலைமாற்றம் உண்டா என ஆராய்க. உண்டென்றால் அதைக் காண்க.

(a) $y_1 = x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha$
$y_2 = x_1 \sin \alpha + x_2 \text{ eos } \alpha$

(b) $y_1 = 6x_1 + 2x_2 - x_3$
$y_2 = x_1 - x_2 + 2x_3$
$y_3 = 7x_1 + x_2 + x_3$

(c) $y_1 = x_1 - 2x_2 + 3x_3$
$y_2 = - x_2 + 4x_3$
$y_3 = - 2x_1 + 2x_2 + x_3$

விடைகள்

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

(2) (a) $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

இங்கே $A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad |A| \neq 0$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} . \ X = A^{-1} Y$

(b) $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 7 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

இங்கே $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $|A| = 0$

A^{-1} கிடையாது. ஆகையால், நேரெதிர் நிலை மாற்றம் கிடையாது.

(c) $$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \ A^{-1} = \begin{bmatrix} -9 & 8 & -5 \\ -8 & 7 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 8 & -5 \\ -8 & 7 & -4 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

§ 47. சதுர அணிகளின் தனித்தன்மைச் சமன்பாடுகள் (Characteristic Equations of Square Matrices)

$$A = [a_{ij}] \ i, j = 1, 2 \ldots n, \ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ xn \end{bmatrix}, \ Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

எனில், $Y = A X$ ... (1)

என்ற ஒருபடி நிலைமாற்றத்தில் X என்ற வெக்டர் A என்ற நிலை மாற்ற அணியால் Y என்ற மற்றொரு வேறுபட்ட வெக்டராக மாறுகிறது. பயன்முறைக் கணிதத்தில் (Applied Mathematics) X என்ற வெக்டரைத் திசைமாருத வேறொரு வெக்டராக மாற்ற வேண்டிய அவசியம் ஏற்படுகிறது. அதாவது, Y-ன் திசையும் X-ன் திசையும் ஒன்ருகவும், ஆனல் அவற்றின் தனிப் பெறுமானம் (absolute value) மட்டுமே வேறுபட்டுள்ளவாறும் அமைக்க வேண்டிவரும். இதைக் குறிக்க $Y = \lambda X$ ... (2)

என்று எழுதலாம். (λ ஏதாவதோர் எண்ணி.)

(1), (2) களிலிருந்து $AX = \lambda X = \lambda I X$

அல்லது $(A - \lambda I) X = [0]$ ... (3)

இங்கே, I என்பது n தரமுள்ள அலகு அணி.

(3) ஐ விரித்து எழுதினல்

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)\, x_1 \quad a_{12}\, x_2 + \dots + a_{1n} &= 0 \\ a_{21}\, x_1 + (a_{22} - \lambda)\, x_2 + \dots + a_{2n} &= 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad & \dots \\ a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)\, x_n &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \dots (4)$$

மேற்கண்ட n ஒருங்கை சமபடிச் சமன்பாடுகளுக்கு அற்பமல்லாத தீர்வுகணம் உண்டென்ருல்

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn}-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

இது λ-வில் n படியுள்ள சமன்பாடு ஆகும். ... ... (5)

அதாவது, $|A - \lambda I| = (-1)^n \{ \lambda^n - \beta_1 \lambda^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} \beta_{n-1} \lambda + (-1)^n \beta_n \} = 0$ ... (6)

$$F(\lambda) \equiv \lambda^n - \beta_1 \lambda^{n-1} + \quad + (-1)^n \beta_n = 0 \quad \dots (7)$$

என்ற சமன்பாட்டைத் தனித்தன்மைச் சமன்பாடு (Characteristic Equation) என்றும்,

$$F(\lambda) \equiv \lambda^n - \beta_1 \lambda^{n-1} + \ldots + (-1)^n \beta^n \quad \ldots (8)$$

என்ற கோவையைத் தனித்தன்மைப் பல்லுறுப்புக் கோவை (Characteristic Polynomial) என்றும் கூறுவர்.

சமன்பாடு (7)-ன் $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ என்ற n மூலங்கள் (மெய் அல்லது கற்பனை) தனித்தன்மை மூலங்கள் (Eigen roots, Eigen values, characteristic roots or latent roots) என்று வழங்கப்படும்.

இந்தத் தனித்தன்மை மூலங்களை (4)-ல் பிரதியிட்டுக் கிடைக்கும் அற்பமல்லா n தீர்வு வெக்டர்களுக்குத் தனித்தன்மை வெக்டர்கள் (characteristic vectors or Eigen vectors) என்று பெயர்.

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ என்பவற்றைத் தவிர λ-விற்கு மற்ற எந்த மதிப்பைப் பிரதியிட்டாலும் சமன்பாடுகள் (4)-க்கு $x_1 = 0 = x_2 \ldots = x_n$ என்ற அற்பமான தீர்வு வெக்டர்தான் கிடைக்கும் என்பதை நன்கு உணர வேண்டும்.

மேலும் சமன்பாடுகள் (4) சமபடி x சமன்பாடுகள் ஆதலால், X என்பது அதன் ஒரு தீர்வு வெக்டர் என்றால், kX (k ஏதாவது ஓர் எண்ணி) என்பதும் அதன் தீர்வு வெக்டர் ஆகும். எனவே, X ஒரு தனித்தன்மை வெக்டர் ஆகும்.

இதிலிருந்து $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ என்ற தனித்தன்மை வெக்டர் காணும்போது $x_1 : x_2 : \ldots : x_n$ என்ற விகிதம் காணல் போதுமானது என்று தெளிவாகிறது.

§ 48. தேற்றங்கள்

§ **48·1.** **ஒரு சதுர அணியின் தனித்தன்மை மூலங்களின் கூட்டுத்தொகை அந்த அணியின் தலையாய மூலைவிட்ட மூலங்களின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமம் ஆகும்.**

தலையாய மூலைவிட்ட மூலங்களின் கூட்டுத் தொகைக்கு அணியின் திரேசு (Trace of the matrix) என்று பெயர்.

§ 48·2. ஒரு சதுர அணியின்தனித் தன்மை மூலங்களின் பெருக்குத் தொகை அந்த அணியின் அணிகோவைக்குச் சமம்.

நிறுவல் : விளக்கம் எளிதாவதற்கு ஒரு (3, 3) சதுர அணி

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$ ஐ எடுத்துக் கொள்வோம்.

A-ன் தனித் தன்மைச் சமன்பாடு

$$| A-\lambda I | \equiv \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$ ஆகும்.

அதாவது, $$-\{ \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33}) \lambda^2 + (a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} - a_{12}a_{21} - a_{23}a_{32} - a_{31}a_{13})\lambda - | A | \} = 0$$

எனவே, சமன்பாட்டுக் கொள்கையிலிருந்து தனித்தன்மை மூலங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

= திரேசு

மேலும், தனித்தன்மை மூலங்களின் பெருக்குத் தொகை

$$= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = | A |$$

துணை முடிவு

அணி A-ன் தனித்தன்மை மூலங்களில் ஏதாவது ஒன்று சுழி என்றால், அந்த அணி பூச்சிய கோவை அணி ஆகும். அதாவது, $| A | = 0$.

மறுதலையாக, ஒரு அணி பூச்சிய கோவை அணி என்றால் அதன் ஒரு தனித்தன்மை மூலமாவது சுழியாக இருத்தல் வேண்டும்,

§ 48·3. ஒரு மேல் (கீழ்) முக்கோண அணியின் தனித் ன்மை மூலங்கள் அதன் தலையாய மூலைவிட்ட மூலங்களாகும்.

நிறுவல் : $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{12} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$

என்றால், அதன் தனித் தன்மைச் சமன்பாடு

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}-\lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

அதாவது, $(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\dots(a_{nn}-\lambda)=0$

∴ A-ன் தனித்தன்மை மூலங்கள் $a_{11}, a_{22}, \dots\dots a_{nn}$ அதாவது தலையாய மூலைவிட்ட மூலங்கள் ஆகும்.

துணைமுடிவு : ஒரு சமமூலைவரை அணியின் தனித்தன்மை மூலங்கள் அதன் மூலைவிட்ட மூலங்களாகும்.

§ **48-4.** (n, n) சதுர அணி A-ன் தனித்தன்மை மூலங்களில் ஒன்று λ_1 எனக் குறிப்போம். அது k முறை மீண்டும் வரின் (repeated k times), $[A-\lambda_1 I]$ என்ற அணியின் அளவை $\geqslant n-k$.

நிறுவல் : A-ன் தனித்தன்மைச் சமன்பாடான

$$|A-\lambda I| = 0 \text{ ஐ}$$

§ 47-ல் விளக்கியவாறு

$$F(\lambda) \equiv \lambda^n - \beta_1\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n\beta_n = 0 \dots (1)$$

என எழுதலாம்.

(1)-ன் ஒரு மூலமான λ_1, k முறை மீண்டும் வருகிறது என்பது எடுகோள்.

எனவே, (1)-ல் $\lambda = \lambda_1 + w$ எனப் பிரதியிட்டு, அதை w-ல் அமையும் சமன்பாடாக,

$$|(A - \lambda_1 I) - wI| = 0$$

அல்லது,

$$\phi(w) \equiv w^n - \mu_1 w^{n-1} + \ldots + (-1)^n \mu_n = 0 \quad \ldots (2)$$

என விரித்தெழுதினுல், $w = 0$ என்பது (2)-ன், k முறை மீண்டும் வரும் மூலமாகும்.

எனவே, சமன்பாடு (2)

$$\varphi(w) \equiv w^n - \mu_1 w^{n-1} + \ldots + -1^{n-r} \mu_{n-k} w^k = 0 \quad \ldots (3)$$

எனச் சுருக்கமடைய வேண்டும்.

இங்கு $\mu_{n-k} \neq 0$ என்பது கருதத்தக்கது.

ஆனுல், சமன்பாட்டுக் கொள்கைப்படி $\mu_{n-k} = [A - \lambda_1 I]$ என்ற அணியிலிருந்து பெறப்படும் $(n-k)$ தரமுள்ள தலையாய சிற்றணி கோவைகளின் (principal minors) கூட்டுத் தொகைக்குச் சமமாகும்.

$\mu_{n-k} \neq 0$ என்பதால், மேற்கூறிய சிற்றணி கோவைகளில் ஒன்ருவது சூழியல்லாது இருக்க வேண்டும்.

அதாவது, $[A - \lambda_1 I]$-ன் அளவை $(n-k)$-க்குக் குறையாமல் இருக்க வேண்டும்.

எனவே, $[A - \lambda_1 I]$-ன் அளவை $\geqslant n - k$.

[குறிப்பு : A ஒரு மெய் சமச்சீர் அணி எனில், $[A - \lambda_1 I]$ வின் அளவை $= n - k$. இதன் நிறுவலை § 79-ல் காண்க.]

§ 49. ஒரு சதுர அணியின் இரண்டு வெவ்வேறு (distinct) தனித்தன்மை மூலங்களிலிருந்து பூச்சியமில்லாத ஒரே தனித்தன்மை வெக்டர் பெறமுடியாது.

A என்ற சதுர அணிக்கு λ_1, λ_2 என்பவை இரண்டு வெவ்வேறு தனித்தன்மை மூலங்கள் எனக் கொள்வோம்.

X_1 என்பது அந்த இரண்டு மூலங்களிலிருந்து பெறப்பட்ட பூச்சியமில்லாத ஒரே வெக்டர் என்போம்.

$\therefore \quad (A - \lambda_1 I) X_1 = [0]$

மற்றும், $(A - \lambda_1 I) X_1 = [0]$

$$\therefore \quad (\lambda_2 - \lambda_1) I X_1 = (\lambda_2 = \lambda_1) X_1 = 0$$

ஆனால் எடுகோள்படி $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\therefore \quad X_1 = 0$$

அதாவது, தனித்தன்மை வெக்டர் பூச்சிய வெக்டர் ஆகும்.

எனவே, நம் எடுகோள் தவறானது. அதாவது, இரண்டு வெவ்வேறு தனித்தன்மை மூலங்களிலிருந்து பூச்சியமில்லாத ஒரேயொரு தனித்தன்மை வெக்டர் பெற முடியாது.

§ 50. தேற்றம்

ஒரு (n, n) சதுர அணி A-ன் n தனித்தன்மை மூலங்கள் வெவ்வேறானவை என்றால் அவற்றால் முறையே கிடைக்கப்பெறும் $X_1, X_2, \ldots X_n$ என்ற தனித்தன்மை வெக்டர்கள் ஒருபடித் தொடர்பிலாதவை (linearly independent)

A என்ற ஒரு $(3, 3)$ சதுர அணியில் நாம் கூறியதற்கு மாறாக X_1, X_2, X_3 என்ற தனித் தன்மை வெக்டர்கள் ஒருபடித் தொடர்புடையன என்று வைத்துக் கொள்வோம்.

அதாவது, $\alpha_1 X_2 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 = [0]$ ... (1)

என்ற சமன்பாட்டில் $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ஆகிய எண்ணிகள் எல்லாமே சூழியல்ல.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ என்பவை A-ன் வெவ்வேறான தனித் தன்மை மூலங்கள் என்றால்,

$$AX_r = \lambda_r X_r \quad (r = 1, 2, 3) \qquad \ldots \quad (2)$$

(1) ஐ A ஆல் முன்காரணியாகப் பெருக்கினால்

$$\alpha_1 AX_1 + \alpha_2 AX_2 \alpha_3 AX_3 = [0] \qquad \ldots \quad (3)$$

(2) ஐ (3)-ல் பயன்படுத்தினால்

$$\alpha_1 \lambda_1 X_1 + \alpha_2 \lambda_2 X_2 + \alpha_3 \lambda_3 X_3 = [0] \qquad \ldots \quad (4)$$

(4) ஐ A ஆல் முன் காரணியாகப் பெருக்கி (2) ஐப் பயன் படுத்தினால்

$$\alpha_1 \lambda_1^2 X_1 + \alpha_2 \lambda_2^2 X_2 + \alpha_3 \lambda_3^2 X_3 = [0] \quad \ldots \quad (5)$$

(1), (4), (5) ஆகிய மூன்று சமன்பாடுகளை இணைத்தால்

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_1 & X_1 \\ \alpha_2 & X_2 \\ \alpha_3 & X_3 \end{bmatrix} = [0] \quad \ldots \quad (6)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} \alpha_1 & X_1 \\ \alpha_2 & X_2 \\ \alpha_3 & X_3 \end{bmatrix}$$ எனில்,

$\therefore \quad BX = [0]$

ஆனால் $|B| \neq 0 \quad \therefore \quad B^{-1}$ காணமுடியும்

$\therefore \quad B^{-1} BX = B^{-1}[0] = [0]$

அதாவது $X = [0]$

அல்லது $\alpha_1 X_1 = 0 = \alpha_2 X_2 = \alpha_3 X_3$

ஆனால், $X_1 \neq 0, X_2 \neq 0, X_3 \neq 0$

$\therefore \quad \alpha_1 = 0 = \alpha_2 = \alpha_3$

இது நாம் எடுத்துக் கொண்ட எடுகோளுக்கு முரணானது.

$\therefore \quad X_1, X_2, X_3$ ஆகிய தனித்தன்மை வெக்டர்கள் ஒருபடித் தொடர்பிலாதவை.

[குறிப்பு : ஒரு சதுர அணியின் சில தனித் தன்மை மூலங்கள் சமமானால் அந்த அணியின் தனித்தன்மை வெக்டர்கள் ஒருபடித் தொடர்பு உடையனவாகவும் இருக்கலாம், ஒருபடித் தொடர்பு இல்லாதனவாகவும் இருக்கலாம். (§ 56, § 77·3-க்களில் உள்ள மாதிரிக் கணக்கைக் காண்க.)]

§ 51. தேற்றம்

ஒரு சதுர அணி A-ம் அதன் திருப்பு அணி A^T-ம் அதே தனித் தன்மை மூலங்களைக் கொண்டவை.

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{23} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

$$A^{T} - \lambda I = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

மேலே உள்ள இரண்டு அணிகளின் தலையாய மூலைவிட்ட மூலங்களில் மாற்றமில்லை.

$$\therefore \quad [A - \lambda I]^{T} = A^{T} - \lambda I$$

$$\therefore \quad |A - \lambda I| = |A^{T} - \lambda I|$$

ஆகையால் அந்த இரண்டு அணிகளின் தனித்தன்மை மூலங்களில் மாற்றம் இருக்க முடியாது. அதாவது, கொடுத்துள்ள சதுர அணி A, அதன் திருப்பு அணி A^{T} ஆகிய இரண்டும் ஒரே தனித்தன்மை மூலங்களைக் கொண்டவை. ஆனால் A A^{T} ஆகியவற்றின் தனித்தன்மை வெக்டர்கள் வேறுபட்டிருக்கலாம்.

§ 52. தேற்றம்

A என்ற (n, n) சதுர அணியின் தனித்தன்மை மூலங்கள் $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ என்றால், kA என்ற சதுர அணியின் தனித்தன்மை மூலங்கள் $k\lambda_1, k\lambda_2, \dots \lambda k_n$ ஆகும் (k ஏதாவதோர் எண்ணி).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \dots & ka_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n \{ \lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_n) \} \quad \ldots \quad (1)$$

மேலும், $|kA - \lambda| \; I = \begin{vmatrix} ka_{11}-\lambda & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22}-\lambda & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$

$$= k_n \begin{vmatrix} a_{11}-\frac{\lambda}{k} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\frac{\lambda}{k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\frac{\lambda}{k} \end{vmatrix}$$

$$= k^n(-1)^n \left\{ \left(\frac{\lambda}{k} - \lambda_1\right)\left(\frac{\lambda}{k} \lambda_2\right) \cdots \left(\frac{\lambda}{k} - \lambda_n\right) \right\} \quad \ldots \quad (2)$$

(இங்கே (1)-ல் λ-க்கு $\frac{\lambda}{k}$ எனப் பிரதியிட்டு (2) கிடைக்கப் பெற்றுள்ளது என்று அறிக).

$\therefore$ kA-ன் தனித்தன்மைச் சமன்பாடு

$$(-1)^n \left\{ \left(\frac{\lambda}{k} - \lambda_1\right)\left(\frac{\lambda}{k} - \lambda_2\right) \cdots \left(\frac{\lambda}{k} - \lambda_n\right) \right\} = 0$$

எனவே, kA-ன் தனித்தன்மை மூலங்கள்

$k\lambda_1, k\lambda_2, k\lambda_3 \ldots k\lambda_n$ ஆகும்.

§ 53. தேற்றம்

பூச்சியமில் கோவையுடைய A என்னும் (n, n) சதுர அணியின் தனித்தன்மை மூலங்கள் $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ என்றால், A^{-1}-ன் தனித் தன்மை மூலங்கள் $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \ldots \frac{1}{\lambda_n}$ ஆகும்.

A யின் λ_r என்ற தனித்தன்மை மூலத்தின் தனித்தன்மை மூலத்தின் வெக்டர் X_r என்றால்

$$A X_r = \lambda_r X_n \quad \ldots \quad (1)$$

$$\therefore \quad R^{-1} A X_r = \lambda_r A^{-1} X_r$$

அதாவது, $X_r = \lambda_r A^{-1} X_r$

அல்லது $A^{-1} X_r = \frac{1}{\lambda_r} \lambda_r \quad \ldots \quad (2)$

(2)-ன் வடிவம் (1) ஐப் போலவே இருப்பதைக் கவனிக்கவும்.

இதிலிருந்து $\frac{1}{\lambda_r}$ $(r = 1, 2, \ldots n)$ என்பவை A^{-1}-ன் தனித் தன்மை மூலங்கள் என்றும், அவற்றினின்று பெறப்படும் A^{-1}-ன் தனித்தன்மை வெக்டர்கள் அதே X_r $(r = 1, 2, \ldots n)$ என்றும் தெளிவாகிறது.

§ 54. தேற்றம்

ஒரு (n, n) சதுர அணி A-ன் தனித்தன்மை மூலங்கள் $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ என்றால் A^m (m நேர் முழுவெண்) என்ற சதுர அணியின் தனித்தன்மை மூலங்கள் $\lambda_1{}^m, \lambda_2{}^m, \lambda_3{}^m, \ldots \lambda_n{}^m$ ஆகும்.

A-ன் ஒரு தனித்தன்மை மூலம் λ_r-க்குரிய தனித் தன்மை வெக்டர் λ_r என்றால்

$$AX_r = \lambda_r X_r$$

$$\therefore \; A^2 X_r = \lambda_r A X_r = \lambda_r (\lambda_r X_r) \lambda_r{}^2 X_r$$

இதே போல், $A^3 X_r = \lambda_r{}^3 X_r$

$$\ldots \qquad \ldots$$

$$A^m X_r = \lambda_r{}^m X_r$$

எனவே, A^m அணியின் தனித் தன்மை மூலங்கள் $\lambda_r{}^m (r = 1, 2 \ldots n)$ ஆகும். மேலும் $\lambda_r{}^m$-லிருந்து பெறப்படும் தனித் தன்மை வெக்டர்கள் X_r ஆகும்.

§ கேய்லி—ஆமில்டன் தேற்றம் (Cayley-Hamilton Theorem)

ஒவ்வொரு சதுர அணியும் அதன் தனித் தன்மைச் சமன்பாட்டைச் சமனடையச் செய்யும்.

அதாவது, (n, n) சதுர அணி A-ன் தனித் தன்மைச் சமன்பாடு $|A-\lambda I| \equiv (-1)^n\{\lambda^n-\beta_1\lambda^{n-1}+\ldots+(-1)^n\beta^n\} = 0$ என்றால் $[A]^n - \beta_1[A]^{n-1} + \ldots + (-1)^n\beta_n I_n = 0$ [I_n என்பது (n, n) அலகு அணி]

நிறுவல் : விளக்கம் எளிமையாவதற்காக (3, 3) சதுர அணியை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad I = I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad |A\lambda I| \equiv \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{bmatrix} \quad \ldots \quad (1)$$

$$\equiv (-1)^3\{\lambda^3-\beta_1\lambda^2 \to \beta_2\lambda-\beta_3\}$$

என்றால், A-ன் தனித்தன்மைச் சமன்பாடு

$\lambda^3 - \beta_1\lambda^2 + \beta_2\lambda - \beta_3 = 0$ ஆகும்.

எனவே, $[A]^3 - \beta_1[A]^2 + \beta_2[A] - \beta_3 I = 0 \quad \ldots \quad (1)$ என்று நிறுவப்பட வேண்டும்

இப்போது, $(a_{11} - \lambda)$-ன் இணைக்காரணி (co-factor)

$$= \begin{bmatrix} a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= \lambda^2 + k_{11}\lambda + k^1_{11}$$

$= p_{11}(\lambda)$ என்க.

$$a_{12}\text{-ன் இணைக்காரணி} = - \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33}-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= k_{13}\,\lambda + k'_{12}$$

$$= p_{12}\,(\lambda) \text{ என்க.}$$

$$a_{13}\text{-ன் இணைக்காரணி} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22}-\lambda \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$= k_{13}\,\lambda + k'_{23}$$

$$= p_{13}\,(\lambda) \text{ என்க.}$$

எனவே, $|A - \lambda I|$ -ன் இணைக்க்காரணிகள் $p_{11}\,(\lambda)$, $p_{12}\,(\lambda)$, $p_{12}\,(\lambda)$, ... போன்று λ-வில் இருபடி அல்லது ஒரு படிக்கோவைகளாகும்.

$$\therefore \quad adi\,[A - \lambda\, I] = \begin{bmatrix} p_{11}\,(\lambda) & p_{12}\,(\lambda) & p_{13}\,(\lambda) \\ p_{21}\,(\lambda) & p_{22}\,(\lambda) & p_{23}\,(\lambda) \\ p_{31}\,(\lambda) & p_{32}\,(\lambda) & p_{33}\,(\lambda) \end{bmatrix} \quad \ldots \quad (2)$$

இப்போது, அணி (2) ஐ $B_0\,\lambda^2$, $B_1\,\lambda$, E_2 என்ற மூன்று அணிகளின் கூட்டுத்தொகையாக அமைக்கலாம். B_0, B_1, B_2 என்பவை (3, 3) தரமுள்ள சதுர அணிகளாகும்.

$\therefore \quad adj\,[A-\lambda I] = B_0\,\lambda^2 + B_1\,\lambda + B_2$ ஆனுல் §21·1-ல் விளக்கியபடி,

$$[A-\lambda I].\ adj\,[A-\lambda I] = |\,4-\lambda I\,|\,.\,[I]$$

அதாவது, $[A-\lambda I].\ \ (E_0\lambda^2 + B_1\,\lambda + B_2)$

$$= (-1)^3\,\{\lambda^3 - \beta_1\,\lambda^2 + \beta_2\lambda\, - \,\beta_3\,\}.\ \ [I]$$

அதாவது, $[A-\lambda I].\ \ (B_0\,\lambda^2 + B_1\lambda + B_2) = -\,\lambda^3\,I + \beta_1\,\lambda^2\,I - \beta_2\,\lambda I + \beta_3\,I$

மேற்கண்ட சமன்பாட்டில் λ^3, λ^2, λ மற்றும் மாறிலி உறுப்புகளை ஒப்பிட்டு நோக்கினால்,

$$-B_0 I = -I \quad \cdots \quad (3)$$

$$AB_0 - B_1 I = \beta_1 I \quad \cdots \quad (4)$$

$$AB_1 - B_2 I = -\beta_2 I \quad \cdots \quad (5)$$

$$AB_2 = \beta_3 I \quad \cdots \quad (6)$$

(3) முதல் (5) வரை உள்ள சமன்பாடுகளை முறையே A^3, A^2, A ஆல் முன் காரணியாகப் பெருக்குக.

$$-A^3 B_0 I = -A^3$$

$$A^3 B_0 - A^2 B_1 = \beta_1 A^2$$

$$A^2 B_1 - AB_2 = -\beta_2 A$$

$$AB^2 = \beta_3 I$$

எல்லாவற்றையும் கூட்டினால்

$$(-1)^3 [A^3 - \beta_8 A^2 + \beta_2 A - \beta_3 I] = [0]$$

அதாவது, $[A]^3 - \beta_1 [A]^2 + \beta_2 [A] - \beta_3 I = [0]$

[குறிப்பு: இந்தத் தேற்றம் பூச்சியக் கோவை அணிக்கும் பொருந்தும்.]

§ 56. மேலே நிறுவிய புகழ் பெற்ற கேய்லி—ஆமில்டன் தேற்றத்தின் மிக முக்கியமான பயன்கள் வருமாறு :

(i) A என்பது எந்த ஒரு சதுர அணி என்றாலும் A^r ஐ, A^{r-1}, A^{r-2}, . போன்ற r ஐ விடக் குறைந்த படியுடைய அணிகளின் ஒருபடிச் சேர்மானமாக எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு (1) .

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 5 \\ -5 & 6 & 5 \\ -5 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$ என்றால்

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 5 & 5 \\ -5 & 6-\lambda & 5 \\ -5 & 5 & 6-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 13\lambda + 6$$

$\therefore$ கேய்லி—ஆமில்டன் தேற்றத்தின்படி

$$A^3 - 8A^2 + 13A - 6I = [0] \quad \ldots \quad (1)$$

நாம் A^4 ஐ A^3, A^2, A ஆகியவற்றின் ஒருபடிச் சேர்மானமாக எழுத முயலுவோம்.

$$A^4 = A \cdot A^3 = A(8A^2 - 13A + 6I)$$
$$= 8A^3 - 13A^2 + 6A$$
$$= 8(8A^2 - 13A + 6I) - 13A^2 + 6A$$
$$51A^2 - 98A + 48I$$

(ii) A என்பது பூச்சியமில்கோவை சதுர அணி என்ருல், A-ன் நேரெதிரணி A^{-1} ஐக் காண, கேய்லி—ஆமில்டன் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.

$$|A - \lambda I| = (-1)^n \{\lambda^n - \beta_1\lambda^{n-1} + \ldots + (-1)^n \beta_n\}$$

என்ருல், கேய்லி—ஆமில்டன் தேற்றத்தின்படி

$$A^n - \beta_1 A^{n-1} + \ldots + (-1)^n \beta_n I = [0]$$

இரு பக்கங்களையும் A^{-1}-ஆல் முன் காரணியாகப் பெருக்கிளுல்

$$A^{n-1} - \beta_1 A^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1} \beta_{n-1} I + (-1)^n \beta_n A^{-1} = [0]$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{\beta_n} [A^{n-1} - \beta_1 A^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1} \beta_{n-1} I]$$

எடுத்துக்காட்டு **(2)**

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 5 \\ -5 & 6 & 5 \\ -5 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$ என்பதன்

நேரெதிர் அணி காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு (1)-ல் உள்ள சமன்பாடு (1) ஐ A^{-1} ஆல் இரு பக்கங்களிலும் முன் காரணியாகப் பெருக்கினால்

$$A^2-8A+13I-6A^{-1}=[0]$$

$$\therefore \quad A^{-1}=\frac{1}{6}[A^2-8A+13I]$$

$$=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-4 & 5 & 5\\ -5 & 6 & 5\\ -5 & 5 & 6\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-4 & 5 & 5\\ -5 & 6 & 5\\ -5 & 5 & 6\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-4 & 5 & 5\\ -5 & 6 & 5\\ -5 & 5 & 6\end{bmatrix}+\frac{13}{6}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}11 & -5 & -5\\ 5 & 1 & -5\\ 5 & -5 & 1\end{bmatrix}$$

மாதிரிக்கணக்கு (1)

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 4\\ 0 & 2 & 6\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$ என்ற அணியின் தனித்தன்மை வெக்டர்களைக் காண்க. [B.E., '70, '73]

தனித்தன்மை சமன்பாடு $|A-\lambda I|=0$

அதாவது, $$\begin{bmatrix}3-\lambda & 1 & 4\\ 0 & 2-\lambda & 6\\ 0 & 0 & 5-\lambda\end{bmatrix}=0$$

அதாவது, $(3-\lambda)(2-\lambda)(5-\lambda) = 0$

$$\therefore \quad \lambda = 2, 3, 5$$

$$\lambda = 2$$

வகை (1)

$\lambda = 2$-லிருந்து பெறப்படும் தனித்தன்மை வெக்டர் $[x_1, x_2, x_3]^T$ அதாவது, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ என்றால்

$$\begin{bmatrix} 3-2 & 1 & 4 \\ 0 & 2-2 & 6 \\ 0 & 0 & 5-2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\therefore \quad x_1 + x_2 + 4x_3 = 0$$

$$6x_3 = 0$$

$$5x_3 = 0$$

$$\therefore \quad x_3 = 0, \quad x_1 = -x_2$$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k \text{ ஏதாவதோர் எண்ணி}$$

அல்லது, $[x_1, x_2, x_3]^T = k[-1, 1, 0]^T$ என்று எழுதுவது வழக்கம்.

வகை (2)

$\lambda = 3$

$$\begin{bmatrix} 3-3 & 1 & 4 \\ 0 & 2-3 & 6 \\ 0 & 0 & 5-3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [0]$$

$$\therefore \quad x_2 + 4x_3 = 0$$
$$-x_2 + 6x_3 = 0$$
$$x_3 = 0$$

$\therefore \quad x_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = k$ (ஏதாவதோர் எண்ணி)

$\therefore \quad [x_1, x_2, x_3]^T = k[1, 0, 0]^T$

வகை (3)

$\lambda = 5$

$$\begin{bmatrix} 3-5 & 1 & 4 \\ 0 & 2-5 & 6 \\ 0 & 0 & 5-5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [0]$$

$$\therefore \quad -2x_1 + x_2 + 4x_3 = 0$$
$$-3x_2 + 6x_3 = 0$$

$\therefore \quad x_2 = 2x_3 ; \quad x_1 = 3x_3$

$\therefore \quad [x_1, x_2, x_3]^T = k[3, 2, 1]^T$ (k ஏதாவதோர் எண்ணி)

மாதிரிக்கணக்கு (2)

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் தனித்தன்மை மூலங்களையும், வெக்டர்களையும் காண்க.

தனித்தன்மைச் சமன்பாடு $|A - \lambda I| = 0$

அதாவது, $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$

அதாவது, $(2-\lambda)^2 (5-\lambda) = 0$

$\therefore$ தனித்தன்மை மூலங்கள் $\lambda = 2, 2, 5$

வகை (1)

$\lambda = 2$

$$\begin{bmatrix} 2-2 & 1 & 2 \\ 0 & 2-2 & 3 \\ 0 & 0 & 5-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [0]$$

$$\therefore \quad x_2 + 2x_3 = 0$$

$$3x_3 = 0$$

$\therefore \quad x_2 = 0, \ x_3 = 0, \ x_1 = k$ (ஏதாவதோர் எண்ணி)

$$\therefore \quad [x_1, x_2, x_3]^T = k\,[1, 0, 0]^T$$

$\lambda = 2$ என்ற தனித்தன்மை மூலத்திலிருந்து ஒரேவொரு தனித்தன்மை வெக்டர் கிடைக்கிறது.

வகை (2)

$\lambda = 5$

$$\begin{bmatrix} 2-5 & 1 & 2 \\ 0 & 2-5 & 3 \\ 0 & 0 & 5-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [0]$$

$$\therefore \quad -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$

$$-3x_2 + 3x_3 = 0$$

$$\therefore \quad x_2 = x_3; \quad x_1 = x_3$$

$\therefore \quad [x_1, x_2, x_3]^T = k\,[1, 1, 1]^T$ (k ஏதாவதோர் எண்ணி)

மாதிரிக்கணக்கு (3)

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$ என்ற

அணியின் தனித்தன்மை மூலங்களையும் வெக்டர்களையும் காண்க.

(Msc '69, '73)

தனித்தன்மைச் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 3-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

அதாவது, $-\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda + 32 = 0$

அதாவது, $(\lambda - 2)^2 (\lambda - 8) = 0$

$\therefore \quad \lambda = 8, 2, 2$

வகை (1)

$\lambda = 8$

தனித்தன்மை வெக்டர் $[x_1, x_2, x_3]^T$ என்றால்,

$$\begin{bmatrix} 6-8 & -2 & 2 \\ -2 & 3-8 & -1 \\ 2 & -1 & 3-8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [0]$$

அதாவது, $-2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0$

$$-2x_1 - 5x_2 - x_3 = 0$$

$$2x_1 - x_2 - 5x_3 = 0$$

முதல் இரண்டு சமன்பாடுகளிலிருந்து

$$\frac{x_1}{2+10} + \frac{x_2}{-4-2} = \frac{x_3}{10-4}$$

$\therefore \quad x_1 : x_2 : x_3 = 2 : -1 : 1$

$\therefore \quad [x_1, x_2, x_3]^T = k[2, -1, 1]^T$

(k ஏதாவதோர் எண்ணி)

வகை (2)

$\lambda = 2$

$$\begin{bmatrix} 6-2 & -2 & 2 \\ -2 & 3-2 & -1 \\ 2 & -1 & 3-2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [0]$$

$$\therefore \quad \begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ஆனால் இந்த மூன்று சமன்பாடுகளும் $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$ என்ற ஒரே சமன்பாட்டைக் குறிக்கிறது.

$$\therefore \quad x_1 = x_1 ; \quad x_2 = 2x_1 + x_3 ; \quad x_3 = x_3$$

அல்லது, $[x_1, x_2, x_3]^T = \lambda[1, 2, 0]^T + \mu[0, 1, 1]^T$

(λ, μ ஏதாவது எண்ணிகள்)

இங்கே $\lambda = 2$ என்ற பொருந்திய (repeated) மூலத்திலிருந்து $[1, 2, 0]^T, [0, 1, 1]$ என்ற இரண்டு (வெவ்வேறுன) ஒருபடித் தொடர்பிலாத தனித்தன்மை வெக்டர்களைப் பெற்றிருக்கிறோம். மெய் சமச்சீர் அணிகளின் தனித்தன்மை மூலங்கள் அனைத்தும் ஒன்றுபடினும் (coincident) அவற்றிலிருந்து பெறப்படும் தனித் தன்மை வெக்டர் ஒருபடித் தொடர்பிலாதவை என்றறிக.

மாதிரிக்கணக்கு (4)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$ என்றால், A^2, A^{-1} காண்க.

A-ன் தனித்தன்மை மூலங்கள் $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ என்றால், A^2-ன் தனித்தன்மை மூலங்கள் $\lambda_1{}^2, \lambda_2{}^2, \lambda_3{}^2$ என்றும் A^{-1}-ன் தனித் தன்மை மூலங்கள் $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \frac{1}{\lambda_3}$ என்றும் காண்பிக்கவும்.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

அதாவது, $$A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

மேலும், $|A| \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ மற்றும் A_{rs}

என்பது a_{rs}-ன் இணைக் காரணியைக் குறித்தால்,

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

இதேபோல், $A_{21} = 0, \quad A_{22} = 3, \quad A_{23} = 0$

$A_{31} = 2, \quad A_{32} = 0, \quad A_{33} = 4$

மேலும், $|A| = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$

$= 2 \times 4 + 0 - 1 \times 2 = 6$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

A-ன் தனித்தன்மைச் சமன்பாடு $|A - \lambda I| = 0$

அதாவது, $\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$

அதாவது, $(2 - \lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$

$\therefore \quad \lambda = 1, 2, 3$

அல்லது $\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 2, \ \lambda_3 = 3$

இப்போது A^2-ன் தனித்தன்மைச் சமன்பாடு $|A^2-\mu I| = 0$

அதாவது, $$\begin{bmatrix} 5-\mu & 0 & -4 \\ 0 & 4-\mu & 0 \\ -4 & 0 & 5-\mu \end{bmatrix} = 0$$

அதாவது, $(4-\mu)(\mu-1)(\mu-9) = 0$

$\therefore$ A^2-ன் தனித்தன்மை மூலங்கள் $\mu = 1, 4, 9$

அதாவது, $\mu_1 = l = \mu_1{}^2$; $\mu_2 = 4 = \lambda_2{}^2$; $\mu_3 = 8 = \lambda_3{}^2$

மேலும் A^{-1}-ன் தனித்தன்மைச் சமன்பாடு

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3}-\gamma & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2}-\gamma & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3}-\gamma \end{bmatrix} = 0,$$

அதாவது, $\left(\frac{1}{2}-\gamma)(\gamma-1)(\gamma-\frac{1}{3}\right) = 0$

$\therefore$ A^{-1}-ன் தனித்தன்மை மூலங்கள் $\gamma = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

அதாவது, $\gamma_1 = 1 = \frac{1}{\lambda_1}$; $\gamma_2 = \frac{1}{2} = \frac{1}{\lambda_2}$; $\gamma_3 = \frac{1}{3} = \frac{1}{\lambda_3}$

மாதிரிக்கணக்கு **(5)**

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ என்ற

அணியைக் கொண்டு கேய்லி—ஆமில்டன் தேற்றத்தைச் சரிபார்க்கவும்.

(b) இதைப் பயன்படுத்தி A^3 மற்றும் A^{-1} ஆகியவற்றைக் காண்க.

[Os. U. BE. '67

(a) A-ன் தனித்தன்மைச் சமன்பாடு

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)-8=0$$

அதாவது, $\lambda^2-4\lambda-5-0$ ... (1)

இப்போது, (1)-ல் $\lambda=A$ எனப் பிரதியிட்டால்

$$A^2 - 4A - 5I$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 16 & 17 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 17 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ (சமனடைகிறது)

∴ கேய்லி—ஆமில்டன் தேற்றம் சரிபார்க்கப்பட்டது.

(b) இப்போது, $A^2 - 4A - 5I = [0]$

$$\therefore \quad A^3 = AA^2 = A(4A + 5I)$$
$$= 4A^2 + 5A$$
$$= 4(4A + 5I) + 5A$$
$$= 21A + 20I$$

$$= 21 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + 20 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 41 & 42 \\ 84 & 83 \end{bmatrix}$$

மேலும், $A^{-1}[A^2 - 4A - 5I] = A^{-1}[0] = 0$

அதாவது, $A - 4I - 5A^{-1} = [0]$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{1}{5}[A - 4I]$$

$$= \frac{1}{5}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

மாதிரிக்கணக்கு (6)

$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ என்றால் A^n காண்க. இதிலிருந்து A^4 எழுதுக.

A-ன் தனித் தன்மைச் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(3-\lambda)-3 = 0$$

அதாவது. $\lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0$ ... (1)

$$\therefore \quad \lambda = 2, 6$$

இப்போது, λ^n ஐ $(\lambda^2 - 8\lambda + 12)$ ஆல் வகுத்தால் ஈவு $\phi(\lambda)$, மற்றும் மீதி $(a\lambda + b)$ என்போம்.

$$\therefore \quad \lambda^n \equiv (\lambda^2 - 8\lambda + 12)\phi(\lambda) + (a\lambda + b) \quad ... \quad (2)$$

(2)-ல் $\lambda = 6, 2$ என அடுத்தடுத்துப் பிரதியிட்டால்

$$6^n = 0 + 6a + b$$
$$2^n = 0 + 2a + b$$

$$\therefore \quad 6^n - 2^n = 4a \text{ அல்லது } a = \frac{1}{4}(6^n - 2^n)$$

$$b = 2^n - 2a = 2^n - \frac{2}{4}(6^n - 2^n) = \frac{3 \cdot 2^n - 6^n}{2}$$

மேலும், $\lambda = A$ என (2)-ல் பிரதியிட்டால்

$$A^n = (A^2 - 8A + 12I)\,\phi(A) + (aA + bI)$$

ஆனால், கேய்லி—ஆமில்டன் தேற்றத்தின்படி,

$$A^2 - 8A + 12I = 0$$

$$\therefore \quad A^n = aA + bI$$

$$= \frac{1}{4}(6^n - 2^n)\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \frac{3\cdot 2^n - 6^n}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$n = 4$ என்றால், $A^4 = 320\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - 624\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 976 & 960 \\ 320 & 336 \end{bmatrix}$$

பயிற்சி 7 (b).

I, கீழ்வரும் அணிகளின் தனித்தன்மை மூலங்களையும், வெக்டர்களையும் காண்க :

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

[M.Sc. '72] [Roorkee '66]

(4) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ (6) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

[B.E. '71] [M.Sc. '69, '73]

(7) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (8) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ (9) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

[B.E. '72]

(10) $\begin{bmatrix} -15 & 4 & 3 \\ 10 & -12 & 6 \\ 20 & -4 & 2 \end{bmatrix}$ (11) $\begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$

[Madurai B.E. '70] [M.Sc. '70]

(12) $\begin{bmatrix} 4 & -20 & -10 \\ -2 & 10 & 4 \\ 6 & -30 & -13 \end{bmatrix}$

[B.E. '74]

II. கீழ்வரும் அணிகளின் தனித்தன்மை மூலங்களின் கூட்டுத் தொகை மற்றும் பெருக்குத் தொகைகளைக் காண்க:

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}$

III. (1) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ மற்றும் $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ஆகிய இரண்டு அணிகளின் தனித்தன்மைச் சமன்பாடுகள் ஒன்றேயாகும் என நிறுவுக. [M.Sc., '68]

(2) ஒரு முக்கோண அணி A-ன் தனித்தன்மை மூலங்கள் அதன் தலையாய விட்ட மூலங்கள் என்று நிறுவுக. [B.E., '70]

(3) A என்ற அணியின் தனித்தன்மை மூலங்களைத் தலையாய மூலைவிட்ட மூலங்களாக உள்ள அணி D என்போம். H, D ஆகியவற்றுக்கு ஒரே தனித்தன்மை சமன்பாடும் தனித்தன்மை மூலங்களும் உண்டு என நிறுவுக. [Madurai B.E., '71]

IV. (1) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ என்றால்

(a) A (b) $A A^T$ (c) A^3 ஆகியவற்றின் தனித்தன்மை மூலங்களைக் காண்க.

(2) $A = \begin{bmatrix} 12 & 3 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் தனித்தன்மை மூலங்களையும், A^{-1}-ன் தனித்தன்மை மூலங்களையும் காண்க.

(3) $g(t)$ என்பது t-ல் பல்லுறுப்புக் கோவை, மற்றும் A என்பது ஒரு சதுர அணி என்போம். $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ என்பவை Aயின் தனித்தன்மை மூலங்கள் என்றால்

$g(\lambda_1) \cdot g(\lambda_2) \cdot g(\lambda_3) \ldots g(\lambda_n) = |g(A)|$ என நிறுவுக.
(M.Sc., '64)

V. (1) $\begin{bmatrix} 10 & -15 \\ 19 & 13 \end{bmatrix}$ என்ற அணி அதன் தனித் தன்மைச் சமன்பாட்டைச் சமனடையச் செய்கிறது என்று காண்பிக்கவும்.
[M.Sc., '72]

(2) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ என்ற அணி அதன் தனித்தன்மைச் சமன்பாட்டைச் சமனடையச் செய்கிறது என்று காண்பிக்கவும்.
[Os. U. B.E., '67]

(3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ என்றால் கேய்லி-ஆமில்டன் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி A^2, A^3, A^4, A^{-1}, A^{-2}, A^{-3} ஆகியவற்றைக் காண்க.

$\{ A^{-2} = (A^{-1})^2,\ A^{-3} = (A^{-1})^3 \}$

(4) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ என்றால், கேய்லி - ஆமில்டன் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி A^3, A^4, A^{-1}, A^{-2} ஆகியவற்றைக் காண்க.

(5) $\begin{bmatrix} 7 & 2 & -2 \\ -6 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் நேரெதிர் அணியைக் கேய்லி - ஆமில்டன் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி (அல்லது மற்ற ஏதாவது வழியில்) காண்க. [M.Sc., '68]

(6) $\begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 45 & -16 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் தனித்தன்மைச் சமன்பாடு காண்க. அதை இந்த அணி சமனடையச் செய்கிறது என்று நிறுவுக. [M.Sc., '71]

(7) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் தனித்தன்மைச் சமன்பாடுகளைக் காண்க. அதை இந்த அணி சமனடையச் செய்யும் என நிறுவுக. இதைப் பயன்படுத்தி A^{-1} ஐக் காண்க. மேலும் A^4 காண்க. [M .Sc. '65]

(8) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் தனித்தன்மைச் சமன்பாடு காண்க. அதை இந்த அணி சமனடையச் செய்யும் என நிறுவுக. இதைப் பயன்படுத்தி A^{-1}, A^4 காண்க. [M. Sc. '71]

VI. (1) $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ என்றால் A^n ஐக் காண்க.

(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ என்றால்,

$A^n = A^{n-2} + A^2 - I \; (n \geq 3)$ என நிறுவுக.

இதைப் பயன்படுத்தி A^{50} காண்க.

(3) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ என்றால்,

$A^6 - 25A^2 + 122A$ என்ற அணியைக் காண்க.

விடைகள்

I. (1) $1, k[1, 0, -1]^T$ $2, k[0, 1, 0]^T$ $3, k[1, 0, 1]^T$

(2) $5, k[1, 1, 1]^T$ $1, k[2, -1, 0]^T$ $1, k[1, 0, -1]^T$

(3) $5, k[1, 2, -1]^T$ $-3, k[2, -1, 0]^T$ $-3, k[3, 0, 1]^T$

(4) $1, k[1, 0, 1]^T$ $2, k[0, 1, 0]^T$ $3, k[-1, 0, 1]^T$

(5) $2, [1, 0, -2]^T$ $2, [1, 2, 0]^T$ $8, [2, -1, 1]^T$

(6) $2, k[1, 0, 0]^T$ $2, k[1, 0, 0]^T$ $2, k[1, 0, 0]^T$

(7) $0, [1, -1, 0]^T$ $1, [0, 0, 1]^T$ $4, [1, 1, 0]^T$

(8) $1, k[1, 0, -1, 0]^T$ $1, [1, -1, 0, 0]^T$ $2, [-2, 4, 1, 2]^T$ $3, [0, 3, 1, 3]^T$

(9) $2, [-1, 1, 0]^T$ $2, [-1, 0, 1]^T$ $6, [1, 2, 1]^T$

(10) $5, k[1, 2, 4]^T$ $-10, k[1, 2, -1]^T$ $-20, k[-2, 1, 2]^T$

(11) $0, k[1, 2, 2]^T$ $3, k[2, 1, -2]^T$ $15, k[2, -2, 1]^T$

(12) $0, k[5, 1, 0]^T$ $-1, k[2, 0, 1]^T$ $2, k[0, 1, -2]^T$

II.

	கூட்டுத்தொகை	பெருக்குத் தொகை
(1)	-2	-1
(2)	6	8
(3)	5	2

IV. (i) 1, 5 (ii) $15 \pm 10\sqrt{2}$ (iii) 1, 125

V. (3) $A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$, $A^4 = \begin{bmatrix} 17 & 24 \\ 12 & 17 \end{bmatrix}$,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^{-2} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-3} = \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$$

(4) $$A^3 = \begin{bmatrix} 42 & 31 & 39 \\ 45 & 39 & 31 \\ 53 & 45 & 42 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 193 & 160 & 144 \\ 224 & 177 & 160 \\ 272 & 224 & 193 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & 5 \\ 7 & -1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$A^{-2} = \frac{1}{121} \begin{bmatrix} -8 & -24 & 29 \\ 40 & -1 & -24 \\ -27 & 40 & -8 \end{bmatrix}$$

(5) $$\frac{1}{8} \begin{bmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 6 & 5 & -2 \\ -6 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

(6) $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

(7) $\lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 9 = 0,$

$$A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & -7 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 7 & -30 & 42 \\ 18 & -13 & 46 \\ -6 & -14 & 17 \end{bmatrix}$$

(8) $\lambda^3 + \lambda^2 - 18\lambda - 40 = 0,$

$$A^{-1} = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} -3 & 5 & 11 \\ 14 & -10 & 2 \\ 5 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 248 & 101 & 218 \\ 272 & 109 & 50 \\ 104 & 98 & 204 \end{bmatrix}$$

VI. (1) $A^n = \dfrac{9^n - 4^n}{5}\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} + \dfrac{9 \cdot 4^n - 4 \cdot 9^n}{5}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(2) $A^{50} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 25 & 1 & 0 \\ 25 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} -30 & 0 & -20 \\ -20 & -54 & 0 \\ 10 & 10 & -74 \end{bmatrix}$

8. சமமூலைவரை, மற்றும் செங்குத்து அணிகள்

(Diagonal and Orthogonal Matrices)

§ 57. ஒப்புமை சதுர அணிகள் (Similar square Matrices)

A, B என்ற சதுர அணிகளை

$$B = S^{-1} AS$$

என்ற சமன்பாட்டு முறையில் தொடர்பு படுத்த பூச்சியமில் கோவை அணி S ஏதாவதொன்று உண்டானால், B ஐ A-ன் ஒப்புமை அணி (similar matrix) என்பர். இத்தொடர்பு $A \overset{S}{\sim} B$ என்ற குறியீடு முறையில் குறிக்கப்படும்.

[குறிப்பு (1): $B = S^{-1} AS$ என்றால், $A = SBS^{-1} = R^{-1} BR$ (இங்கே $R = S^{-1}$)

(2) A, B என்ற மேலே விளக்கிய அணிகளை ஒப்புமை அணிகள் என்று கூறுவர்.]

§ 57-1. ஒப்புமை அணிகள்—விளக்கம்

இரண்டு வேறுபட்ட அடிப்படை வெக்டர் தொகுதிகளைக் (systems of base vectors) கொண்டு கிடைக்கப் பெறும் அதே (the same) ஒருபடி நிலைமாற்றத்தின் இரண்டு நிலைமாற்ற அணிகளுக்கு (Matrices of transformation) ஒப்புமை அணிகள் என்று பெயர்.

மேற்கூறிய வரைவிலக்கணப்படி A, B என்பவை ஒப்புமை அணிகள் எனில்,

$B = S^{-1} AS$, $|S| \neq 0$ என நிறுவலாம்.

E_1 என்னும் அடிப்படை வெக்டர் தொகுதியில் A என்ற நிலை மாற்ற அணியால் கிடைக்கப் பெறும் ஒருபடி நிலைமாற்றத்தை

$$Y = AX \quad \ldots \quad (1)$$

என்றும், E_2 என்னும் மற்றொரு வேறுபட்ட அடிப்படை வெக்டர் தொகுதியில் B என்ற நிலைமாற்ற அணியால் கிடைக்கப் பெறும் அதே (the same) நிலைமாற்றத்தை

$$\eta = B\,\xi \quad \ldots \quad (2)$$

என்றும் குறிப்பதாகக் கொள்வோம்.

E_1 என்னும் அடிப்படை வெக்டர் தொகுதியை E_2 என்னும் மற்றுமொரு அடிப்படை வெக்டர் தொகுதியாக மாற்றம் செய்யும் பூச்சியமில் கோவை அணி S எனில்,

$$X = S\,\xi\,; \quad Y = S\eta \quad \ldots \quad (3)$$

(3) ஐ (1)-ல் பிரதியிடுக.

$$S\eta = A\,S\,\xi$$

இச் சமன்பாட்டை S^{-1}-ஆல் முன்காரணியாகப் பெருக்கினால்

$$\eta = S^{-1}\,AS\,\xi \quad \ldots \quad (4)$$

(2) ஐயும் (4) ஐயும் ஒப்பிட்டு நோக்கின்,

$$B = S^{-1}AS \quad \ldots \quad (5)$$

என அறிகிறோம்.

A என்ற நிலைமாற்ற அணி எந்த அளவில் X என்ற வெக்டரை Y–ஆக வடிவ மாற்றம் (deformation) உண்டாக்குகிறதோ அதே அளவில் $B = S^{-1}AS$ என்ற நிலைமாற்ற அணி, ξ என்ற வெக்டரை η ஆக வடிவமாற்றம் செய்வதால், A, B என்ற அணிகளுக்கு ஒப்புமை அணிகள் என்ற பெயர்ப் பொருத்தம் அறியலாம்.

§ 58. தேற்றம்

B என்ற சதுர அணி A என்ற சதுர அணிக்கு ஒப்புமை (similar) என்றால் A–ம் B–ம் ஒரே தனித்தன்மை சமன்பாடு உடையனவாகும். அதனால் அவற்றின் தனித்தன்மை மூலங்கள் வேறுபடாதவை.

நிறுவல் : B என்பது A-ன் ஒப்புமை அணி என்றால்

$$B = S^{-1}\,AS$$

∴ B-ன் தனித்தன்மை பல்லுறுப்புக் கோவை (characteristic polynomial)

$$= | B - \lambda I |$$
$$= | S^{-1} AS - \lambda S^{-1} IS |$$
$$= | S^{-1} AS - \lambda S^{-1} IS |$$
$$= | S^{-1} (A - \lambda I) S |$$
$$= | S^{-1} | \cdot | A - \lambda I | \cdot | S |$$
$$= | S^{-1} | \cdot | S | \cdot | A - \lambda I |$$
$$= | X | A - \lambda I |$$
$$= | A - \lambda I |$$

= A-ன் தனித்தன்மை பல்லுறுப்புக் கோவை.

எனவே, தனித்தன்மைச் சமன்பாடுகள் ஒன்றேயாகும்.

ஆகவே, A-ம் B-ம் ஒரே தனித்தன்மை மூலங்கள் உடையவை.

[குறிப்பு (1): இதன் மறுதலை உண்மையல்ல. அதாவது, அதே தனித்தன்மை மூலங்கள் உள்ள இரண்டு அணிகள் ஒப்புமை அணிகளாக இருக்கவேண்டிய தேவையில்லை.

[பயிற்சி (8-a) கணக்கு IV ஐக் காண்க.]

(2) ஒரு சதுர அணி, அதன் திருப்பு அணி, அதன் ஒப்புமை அணி—ஆகியவற்றின் தனித்தன்மை மூலங்கள் சமமாக இருப்பினும், அவற்றின் தனித்தன்மை வெக்டர்கள் பொதுவாக வேறுபட்டவை.]

§ 59. A மற்றும் $B = S^{-1} AS$ என்ற ஒப்புமை சதுர அணிகளின் பொதுவான ஒரு தனித்தன்மை மூலம் λ_i என்போம். λ_i-லிருந்து கிடைக்கப்பெறும் B-ன் தனித்தன்மை வெக்டர் Y என்றால், A-ன் தனித்தன்மை வெக்டர் SY ஆகும்.

B-ன் தனித்தன்மை வெக்டர் Y என்பதால்

$$BY = \lambda_i Y$$

மேலும் $B = S^{-1} AS$ என்பதால் $AS = SB$

$$\therefore \quad ASY = SBY = (S \lambda_i Y) = \lambda_i SY$$

∴ λ_i-லிருந்து கிடைக்கப் பெறும் A-ன் தனித்தன்மை வெக்டர் SY ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$ என்பது

கொடுத்துள்ள அணி எனக்கொள்வோம்.

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$ என்ற அணி

பூச்சியமில் கோவை அணியின் நேரெதிர் அணி.

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ B = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 5 & 14 & 13 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ என்பது A-ன்

ஓர் ஒப்புமை அணி ஆகும்.

A-ன் தனித் தன்மைச் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

அதாவது, $5-11\lambda+7\lambda^2-\lambda^3 = (5-\lambda)(1-\lambda)^2 = 0$ ... (1)

B-ன் தனித்தன்மைச் சமன்பாடு
$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 14 & 13 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

அதாவது, $(5-\lambda)(1-\lambda)^2 = 0$ ... (2)

(1)-ம், (2)-ம் ஒன்றே என்பது தெளிவாகிறது. அதாவது, ஒப்புமை அணிகளுக்கு அதே தனித்தன்மைச் சமன்பாடும் அதே தனித்தன்மை மூலங்களும் உண்டு.

இந்த இரண்டு அணிகளின் பொதுவான தனித்தன்மை மூலங்கள் $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1$.

$\lambda_1 = 5$-லிருந்து கிடைக்கும் B-ன் தனித்தன்மை வெக்டர்

$$Y_1 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$ என்றால்

$$\begin{bmatrix} 5-5 & 14 & 13 \\ 0 & 1-5 & 0 \\ 0 & 0 & 1-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 0$$

இந்த மூன்று சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணில்

$$Y_1 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

மேலும், $\lambda = 5$-லிருந்து பெறப்படும் A-ன் தனித்தன்மை வெக்டர்

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$ என்றால்

$$\begin{bmatrix} 2-5 & 2 & 1 \\ 1 & 3-5 & 1 \\ 1 & 2 & 2-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

இந்த மூன்று சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணில்

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

இப்போது, $$SY_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = X_1$$

$\lambda_2 = 1$-லிருந்து பெறப்படும் B-ன் தனித்தன்மை வெக்டர்

$$Y_2 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$ என்றால்,

$$\begin{bmatrix} 5-1 & 14 & 13 \\ 0 & 1-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 0$$

அதாவது, $4y_1 + 14y_2 + 13y_3 = 0$

அல்லது, $y_1 = -\frac{7}{2}k - \frac{13}{4}l$

$y_2 = k$

$y_3 = -l$

இங்கே k, l என்பவை ஏதாமவை எண்ணிகள்.

$$\therefore \quad Y_2 = k \begin{bmatrix} -\frac{7}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + l \begin{bmatrix} -\frac{13}{4} \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

இங்கே $k = -2$, $l = 0$ எனக் கொண்டால் ஒரு தனித் தன்மை வெக்டர் $= \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ கிடைக்கும்.

$k = 0$, $l = -4$ எனக் கொண்டால் மற்ருெரு தனித்தன்மை வெக்டர் $= \begin{bmatrix} 13 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ கிடைக்கும்.

இந்த இரண்டு தனித்தன்மை வெக்டர்களும் ஒருபடித் வெக்டர்களும் ஒருபடித் தொடர்பிலாதவை என்று ஓர்க. (§50 குறிப்பு)

§ 60. சமமூலைவரை அணிகள் (Diagonal Matrices)

அணிகளில் சமமூலைவரை அணிகள், மேற்கொள்ளுவதற்கு மிக்க எளிமையானவை என்று விளக்கவேண்டிய அவசியம் இல்லை.

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & d_{nn} \end{bmatrix} \text{ என்ற}$$

$$\text{சமமூலைவரை அணியை } D = \begin{bmatrix} d_{nn} & \ldots & \bigcirc \\ & d_{22} & \\ \bigcirc & & d_{nn} \end{bmatrix}$$

அல்லது $D = diag\ (d_{11}, d_{22}, d_{nn})$ என்று சுருக்கமாக எழுதுவது மரபு.

சமமூலைவரை அணியின் பண்புகளைக் கீழே காண்போம்.

§ 60.1. $| \mathbf{D} | = \mathbf{d}_{11}, \mathbf{d}_{22}, \mathbf{d}_{33} \ldots \mathbf{d}_{nn}$

இதன் நிறுவல் வெளிப்படை.

§ 60.2. **D-ன் தனித்தன்மை மூலங்கள் அதன் மூலைவிட்ட மூலங்களாகும்.**

$$| D - \lambda I | = \begin{bmatrix} d_{11} & & \bigcirc \\ & d_{22} \quad \lambda & \\ \bigcirc & & d_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

$$= 0$$

என்பது தனித்தன்மைச் சமன்பாடு

$\therefore \quad (d_{11} - \lambda)\ (d_{22} - \lambda) \ \ldots \ (d_{nn} - \lambda) = 0.$

$\therefore$ தனித்தன்மை மூலங்கள் $d_{11}, d_{22}, \ldots d_{nn}$

§ 60-3

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

என்றால்

$$D \cdot E_i = d_{ii} \cdot E_i \ (i = 1, 2, \ldots n)$$

என்பது எளிதில் விளங்கும்.

∴ $E_i \ (i = 1, 2, \ldots n)$ என்பவை d_{ii}-லிருந்து கிடைக்கப் பெறும் D-ன் தனித்தன்மை வெக்டர்களாகும். மேலும் E_i என்ற வெக்டர்கள் அனைத்தும் ஒருபடித் தொடர்பிலாதவை. ஆகையால் ஒரு சமமூலை வரை அணி ஒருபடித் தொடர்பிலாத தனித் தன்மை வெக்டர்களையே பெற்றிருக்கும்.

§ 61. தேற்றம்

A என்ற (n, n) சதுர அணி ஒருபடித் தொடர்பிலாத n தனித் தன்மை வெக்டர்களைப் பெற்றிருந்தால் அந்த அணி ஒரு சமமூலை வரை அணிக்கு ஒப்புமை ஆகும்.

A-ன் தனித்தன்மை மூலங்கள் $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ மற்றும் அதன் ஒருபடித் தொடர்பிலாத வெக்டர்கள் முறையே $X_1, X_2, \ldots X_n$ எனக் கொள்வோம்.

S என்ற அணி $X_1, X_2, \ldots X_n$ என்ற வெக்டர்களை நிரல்களாகக் கொண்ட அணி எனில்,

$$S^{-1} AS = D \text{ diag } (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

நிறுவல்

இப்போது, $AX_i = \lambda X_i$ ... (1)

மேலும் $S = [X_1, X_2, \ldots X_n]$ ... (2)

$X_1, X_2, \ldots X_n$ ஆகியவை ஒருபடித் தொடர்பிலாத n வெக்டர்கள் என்பதால் S-ன் அளவை n ஆகும்.

$\therefore \ |S| \neq 0.$ என்வே, S^{-1} ஐக் காண இயலும்.

இப்போது, $AS = [AX_1, AX_2, \ldots AX_n]$ (§ 19·2)

$= [\lambda_1 X_1, \lambda_2 X_2, \ldots \lambda_n X_n]$

[சமன்பாடு (1)]

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ என்பவை எண்ணிகளாதலால்

$\lambda_1 X_1 = X_1 \lambda_1, \ \lambda_2 X_2 = X_2 \lambda_2, \ldots \ldots$

$$\therefore \ AS = X_1 \lambda_1, X_2 \lambda_2, \ldots X_n \lambda_n]$$

$$= [X_1, X_2, \ldots X_n] \times \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$= S \cdot \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)$$

$$\therefore \ S^{-1}AS = S^{-1}S \cdot \text{diag}(\lambda_1, \lambda, \ldots \lambda_n)$$

$$= \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)$$

$\therefore$ $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)$ என்ற சமமூலை வரை அணியும் A-ம் ஒப்புமை அணிகளாகும்.

குறிப்பு (1): இந்தத் தேற்றத்தில், ஒருபடித் தொடர்பிலா n தனித்தன்மை வெக்டர்களைக் கொண்ட (n, n) சதுர அணிக்கு ஒப்புமையாக உள்ள சமமூலைவரை அணி காணும் முறையும் பயன்படும் S என்ற அணி காணும் முறையும் விளக்கப் பட்டுள்ளன.

கொடுத்துள்ள அணி A–ன் தனித்தன்மை மூலங்கள் $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ ஆகியவற்றை முதலில் காணவேண்டும். பின்பு, ஒவ்வொரு தனித்தன்மை மூலத்திலிருந்து கிடைக்கப் பெறும் $X_1; X_2, \ldots X_n$ என்னும் A–ன் தனித்தன்மை வெக்டர் களைக் காணவேண்டும். $X_1, X_2, \ldots X_n$ ஆகிய வெக்டர்களை நிரல்களாகக் கொண்ட $S = [X_1, X_2, \ \ X_n]$ என்ற அணிதான் A ஐச் சமமூலைவரை அணிக்கு ஒப்புமையாக மாற்றும் அணி யாகும். சமமூலைவரை அணி $= \text{diag}(\lambda_1, \ . \ \lambda_n)$.

(2) தனித்தன்மை மூலங்கள் அனைத்தும் வெவ்வேறானவையாக இல்லை என்றால், அதன் தனித்தன்மை வெக்டர்கள் எல்லாம் ஒருபடித் தொடர்பிலாதவையாக இருக்கும் என நாம் உறுதியாகக் கூற இயலாது. ஆகவே, தனித்தன்மை மூலங்கள் வெவ்வேறானவையாக அமையப் பெறாத அணியைச் சமமூலைவரை அணியாக்க இயலாமல் போகலாம். எனவே, ஒரு சதுர அணி சமமூலைவரை அணியாக மாற்றப்பட வேண்டுமானால், அதற்கான **போதிய நிபந்தனை** (sufficient condition): அதன் தனித்தன்மை மூலங்கள் வெவ்வேறானவையாக இருக்க வேண்டும். ஆனால், இது வேண்டிய நிபந்தனை (necessary condition) அல்ல எனச் சமச்சீர் அணி அதிகாரத்தில் அறியலாம் (§ 77·1, § 77·2).

(3) சம மூலைவரை அணியாக மாற்றப்படக்கூடிய அணிக்கு **சமமூலைவரை தகுதி அணி** (diagonable matrix) என்று பெயர்.]

§ 62. ஒரு சதுர அணியின் நேர் முழுவெண் அடுக்கு காணல் (positive integral power of a square matrix)

கொடுத்துள்ள அணிக்கு ஒப்புமையாகச் சமமூலைவரை அணி கண்ட பின்பு, அதன் வழி கொடுத்துள்ள அணியின் அடுக்கு காண்பது எளிதாகும். சமமூலைவரை அணிகளின் பயன்களில் இதுவும் ஒன்றாகும்.

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{bmatrix} \text{ என்றால்}$$

$$D^p = \begin{bmatrix} d_{11}^p & 0 \\ 0 & d_{22}^p \end{bmatrix} \quad (p \text{ நேர் முழுவெண்})$$

என்பது வெளிப்படை.

∴ சமமூலைவரை அணியின் தேவையான அடுக்குள்ள அணி காண்பதற்கு, அதன் மூலைவிட்ட மூலங்களில் அதே அளவு அடுக்கு ஏற்படுத்தால் போதுமானது. கொடுத்துள்ள அணி A ஐ D என்ற சமமூலைவரை அணிக்கு ஒப்புமையாக மாற்றும் அணி S என்றால்

$$D = S^{-1}AS$$

$$D^2 = (S^{-1}AS)(S^{-1}AS)(S^{-1}AS) = S^{-1}A(SS^{-1})AS$$
$$= S^{-1}A^2S$$

இதேபோல், $D^3 = S^{-1} A^3 S$

$$\begin{matrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix}$$

$$D^p = S^{-1} A^p S$$

$$\therefore \quad A^p = SD^pS^{-1}$$

எனவே, கொடுத்துள்ள சதுர அணியின் தேவையான அடுக்குள்ள சதுர அணியை இம் முறையில் காணலாம்.

மாதிரிக்கணக்கு (1)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ என்றால்,}$$

$P^{-1} AP$ என்பது சம மூலை வரை அணி என்று காண்பிக்கவும். [B. E. '72]

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ என்றால்,}$$

a_{11}-ன் இணைக்காரணி $= 2$; a_{12}-ன் இணைக்காரணி $= 1$

a_{13}-ன் இணைக்காரணி $= 1$; a_{21}-ன் இணைக்காரணி $= -2$

a_{22}-ன் இணைக்காரணி $= 1$; a_{23}-ன் இணைக்காரணி $= 1$

a_{31}-ன் இணைக்காரணி $= 2$; a_{32}-ன் இணைக்காரணி $= -3$

a_{33}-ன் இணைக்காரணி $= 1$

மேலும், $|P| = 1(2) + 1(1) + 1(1) = 4$

$$\therefore \quad P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$AP = \begin{bmatrix} 3-1 & 3-1 & 3+2+1 \\ 2-4 & 2-2 & 2+8+2 \\ 1-1 & 1-3 & 1+2+3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ -2 & 0 & 14 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad P^{-1}AP = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ -2 & 0 & 12 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4+4 & 4-4 & 12-24+12 \\ 2-2 & 2+6 & 6+12-18 \\ 2-2 & 2-2 & 6+12+6 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

எனவே, $P^{-1}AP$ என்பது சமமூலைவரை அணியாகும்.

மாதிரிக்கணக்கு (2)

$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ என்ற அணியைச் சமமூலைவரை

அணியாக மாற்றி A^4 **காண்க.**

A-ன் தனித்தன்மைச் சமன்பாடு

$$\begin{bmatrix} -1-\lambda & 3 \\ -2 & 4-\lambda \end{bmatrix} = -(1+\lambda)\,4-\lambda)+6=0$$

அதாவது, $\lambda^2-3\lambda+2=0$

$\therefore \quad \lambda = 1, 2$

தனித்தன்மை மூலங்கள் வெவ்வேறுனவை. ஆதலால் A ஐ சமமூலைவரை அணியாக மாற்றியமைக்கலாம்.

$\lambda = 1$-லிருந்து பெறப்படும் தனித்தன்மை

வெக்டர் $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ என்றால்

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \therefore \quad -2x_1+3x_2=0$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 2$-லிருந்து பெறப்படும் தனித்தன்மை

வெக்டர் $\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}$ என்றால்,

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = 0 \quad \therefore \quad 3x_1^1+3x_2^1=0$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad S = \begin{bmatrix} x_1 & x_1' \\ x_2 & x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1}AS = D = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad S^{-1}A^4S = D^4 = \begin{bmatrix} 1^4 & 0 \\ 0 & 2^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^4 = SD^4 S^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -29 & 45 \\ -30 & 46 \end{bmatrix}$$

மாதிரிக்கணக்கு (3)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$ என்ற அணியைச்

சமமூலைவரை அணியாக மாற்றுக. [M.Sc., '72]

A-ன் தனித்தன்மைச் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 11\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 1$$

இங்கே கடைசி இரண்டு தனித்தன்மை மூலங்கள் வெவ்வேறானவை அல்ல.

$\lambda_1 = 5$-லிருந்து பெறப்படும் தனித்தன்மை வெக்டர்

$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ என்றால்

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\therefore \quad -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$$
$$x_1 = 1 = x_2 = x_3$$

$$\therefore X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = \lambda_3 - 1$ லிருந்து பெறப்படும் தனித் தன்மை வெக்டர்

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix}$$ என்ருல்,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = 0$$

$\therefore \quad x_1' + 2x_2' + x_3' = 0$

அல்லது $x_1' = -2k - l$

$x_2' = k$

$x_3' = l$ $\quad$ (k, l ஏதாமவை எண்ணிகள்)

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + l \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$k = -1$, $l = 0$ என்ருல் கிடைக்கும் தனித்தன்மை வெக்டர்

$$X_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$ மற்றும்

$k = 0$, $l = -1$ என்ருல் கிடைக்கும் தனித்தன்மை வெக்டர்

$$X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$ ஆகிய இரண்டும் ஒருபடித்

தொடர்பிலாதவை.

$\therefore$ A ஐ சமமூலைவரை அணியாக மாற்றியமைக்கலாம்.

இங்கே, $S = [X_1, X_2, X_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad S^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

$$\therefore \quad S^{-1}AS = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

பயிற்சி 8 (a).

I. கீழ்வரும் அணிகளைச் சமமூலைவரை அணிகளாக மாற்றுக. அவ்வாறு மாற்றும் அணிகள் S ஐயும் காண்க.

(1) $\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ [M.Sc. '73]

(2) $\begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ [M.Sc. 71]

II. பின்வரும் அணிகளைச் சமமூலைவரை அணிகளாக மாற்றி அமைக்கவும்.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 8 & -8 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 10 & -2 & -5 \\ -2 & 2 & 3 \\ -5 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

III. (1) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ என்ற அணியைச் சமமூலைவரை அணியாக மாற்றியபின் A^6 காண்க.

(2) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ என்ற அணியைச் சம மூலைவரை அணியாக மாற்றுக. இதைப் பயன்படுத்தி A^4 காண்க.

(3) $B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ஐச் சமமூலைவரை அணியாக மாற்றியபின் A^8 காண்க.

IV. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ மற்றும் $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & =1 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

என்ற அணிகள் ஒரே தனித்தன்மை மூலங்களைப் பெற்றிருந்தாலும் அவை ஒப்புமை அணிகள் அல்ல என நிறுவுக.

விடைகள்

I. (1) $D = \text{diag}\,(2, 2, 8)$; $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(2) $D = \text{diag}\,(0, 3, 15)$; $S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

II. (1) diag (1, 2, 3), (2) diag (−4, 3, 1)
(3) diag (1, 2, 3), (4) diag (0, 3, 14)

III. (1) $D = \text{diag}\,(2, 5)$;

$$A^6 = \begin{bmatrix} 260502 & 130123 \\ 260246 & 130379 \end{bmatrix}$$

(2) $D = \text{diag}\,(2, 3, 6)$;

$$A^4 = \begin{bmatrix} 251 & -405 & 235 \\ -405 & 891 & -405 \\ 235 & -405 & 251 \end{bmatrix}$$

(3) $D = \text{diag}(-1, 3, 4)$;

$$A^8 = \begin{bmatrix} 25 & 78 & 19 \\ 13 & 38 & 6 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}$$

§ 63. செங்குத்து வெக்டர்களும் அணிகளும் (Orthogonal Vectors and Matrices)

§ 63.1. செங்குத்து வெக்டர்கள்

$x_1, x_2, \ldots x_n$ என்ற n கூறுகளைக் கொண்ட ஒரு வெக்டரை X என்றும், $y_1, y_2, \ldots y_n$ என்ற n கூறுகளைக் கொண்ட மற்றொரு வெக்டரை Y என்றும் குறித்தால்

$X \cdot Y = x_1 y_1 + x_1 y_2 + \ldots + x_n y_n$ என்பது X, Y-களின் புள்ளிப் பெருக்கு (dot product) என்று வெக்டர் பகுவியலில் (Vector Analysis) வழங்கப்படும்.

மேலும், $X \cdot Y = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$

இதேபோல், $Y \cdot Y = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$

$+\sqrt{X \cdot Y}$ ஐ வெக்டர் X-ன் மட்டு (modulus) அல்லது தனிப் பெறுமானம் (absolute value) என்று கூறுவர்.

$X \cdot Y = 0$ எனில், X, Y என்பவை செங்குத்து வெக்டர்கள் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$X = (1, 1, 1)$, $Y = (1, -2, 1)$ என்றால்

$$X \cdot Y = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 = 0$$

$$X \cdot X = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3; \quad Y \cdot Y = 1^2 + (-2)^2 + 1^2 = 6$$

$$\therefore \quad \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{3} \; ; \quad \sqrt{Y \cdot Y} = \sqrt{6}$$

மேலே விளக்கிய வெக்டர் பண்புகளை அணி குறியீட்டு முறையிலும் (matrix notation) எழுதலாம்.

$X = [x_1 \, x_2, \ldots n_n]$, $Y = [y_1 \, y_2 \cdots y_n]$

என்று இரு நிரைவெக்டர்களை எடுத்துக்கொண்டால்

$XY^T = [x_1 y_1 = x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n]$ ஆகும்.

எனவே, XY^T என்பது $X \cdot Y$ என்னும் புள்ளிப் பெருக்கியை மூலகமாகக் கொண்ட (1, 1) அணியாகும்.

மேலும், $XX^T = [x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2] = [X \cdot X]$

தவிரவும், X, Y என்ற இரண்டு நிரை வெக்டர்கள் செங்குத்து என்றால் $XY^T = [0]$ என்பது பெறப்படும்.

X-ன் தனிப் பெருமானம் $= \sqrt{|XX^T|}$

[குறிப்பு (1): $XX^T \neq X^T X$

(2) $U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ என்ற

நிரல் வெக்டர்கள் செங்குத்து என்றால் $U^T V = [0]$

U-ன் தனிப் பெருமானம் $= \sqrt{|U^T U|}$]

§ 63-2. கிராம்—சிமிட் (Gram Schmidt) தேற்றம்—செங்குத்து வெக்டர்களைப் பெறுதல்.

கொடுத்துள்ள $X_1, X_2, \dots X_m$ என்னும் ஒருபடித் தொடர்பிலாத m வெக்டர் தொகுதியை $Y_1, Y_2 \dots Y_m$ என்னும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக (mutually orthogonal) அமையும் வெக்டர் தொகுதியாக மாற்றியமைக்க இயலும்.

முதலில். $Y_1 = X_1$ எனக் கொள்க.

பின்னர், $Y_2 = X_2 + aY_1$ (a ஓர் எண்ணி) என்று எடுத்துக் கொள்வோம்.

Y_1-ம், Y_2-ம் செங்குத்தாக அமைய வேண்டியிருப்பதால் $Y_1 \cdot Y_2 = 0$

அதாவது, $Y_1 \cdot X_2 + aY_1 \cdot Y_1 = 0$

$$\therefore \quad a = -\frac{Y_1 \cdot X_2}{Y_1 \cdot Y_1}$$

எனவே, $Y_2 = X_2 - \left(\frac{Y_1 \cdot Y_2}{Y_1 \cdot Y_1} \right) Y_1$

இனி, $Y_3 = X_3 + aY_2 + bY_1$ என்க.

Y_1, Y_2, Y_3 ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக அமைய வேண்டும்.

$Y_1 \cdot Y_2 = 0$ என மாற்றியமைத்தாகி விட்டது. $Y_1 \cdot Y_3 = 0$, $Y_2 \cdot Y_3 = 0$ என அமையுமாறு மாற்றியமைக்க வேண்டும்.

அதாவது, $$\left. \begin{aligned} Y_1 \cdot X_3 + aY_1 \cdot Y_2 + bY_1 \cdot Y_1 &= 0 \\ Y_2 \cdot X_3 + aY_2 \cdot Y_2 + bY_2 \cdot Y_1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

ஆனால், $Y_1 \cdot Y_2 = Y_2 \cdot Y_1 = 0$

$$\therefore \quad \left. \begin{aligned} Y_1 \cdot X_3 + bY_1 \cdot Y_1 &= 0 \\ Y_2 \cdot X_3 + aY_2 \cdot Y_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\therefore \quad a = -\frac{Y_2 \, X_3}{Y_2 \cdot Y_2}, \; b = -\frac{Y_1 \cdot X_3}{Y_1 \cdot Y_1}$$

எனவே, $Y_3 = X_3 - \left(\frac{Y_2 \cdot X_3}{Y_2 \cdot Y_2} \right) Y_2 - \left(\frac{Y_1 \cdot X_3}{Y_1 \cdot Y_1} \right) Y_1$

இவ்வாறே தொடர்ந்து செயல்பட்டால்,

$$Y_m = X_m - \left(\frac{Y_{m-1} \cdot X_m}{Y_{m-1} \cdot Y_{m-1}} \right) Y_{m-1}$$
$$- \left(\frac{Y_{m-2} \cdot X_m}{Y_{m-2} \cdot Y_{m-2}} \right) Y_{m-2} - \cdots - \left(\frac{Y_1 \cdot X_m}{Y_1 \cdot Y_1} \right) Y_1$$

[குறிப்பு : $G_i = \frac{Y_i}{\| Y_i \|}$, $(i = 1, 2, n)$ என்பவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக அமைந்துள்ள அலகு வெக்டர்களைக் குறிக்கும் [$\| Y_i \|$ = வெக்டர் Y_i-ன் தனிப் பெறுமானம்]. இந்த $G_1, G_2, \ldots G_m$ என்னும் வெக்டர்களுக்கு அலகுச் செங்குத்து வெக்டர்கள் (orthonormal vectors) என்று பெயர்.

எடுத்துக்காட்டு :

$X_1 = [1, -1, 0]^T$, $X_2 = [2, -1, -2]^T$, $X_3 = [1, -1, -2]$ என்ற வெக்டர்களை அலகுச் செங்குத்து வெக்டர்களாக மாற்றியமைக்கவும்.

மாற்றியமைக்கப்பட்ட செங்குத்து வெக்டர்களை Y_1, Y_2, Y_3 எனக் குறிப்போம்.

$$Y_1 = X_1 = [1, -1, 0]^T$$

$$Y_2 = X_2 - \left(\frac{Y_1 \cdot X_2}{Y_1 \cdot Y_1}\right) Y_1$$

$$= [2, -1, 2]^T - \frac{3}{2}[1, -1, 0]^T$$

$$= \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -2\right]^T$$

$$Y_3 = X_3 - \left(\frac{Y_2 \cdot X_3}{Y_2 \cdot Y_2}\right) Y_2 - \left(\frac{Y_1 \cdot X_3}{Y_1 \cdot Y_1}\right) Y_1$$

$$= [1, -1, 2]^T - \frac{4}{\left(\frac{9}{2}\right)}\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -2\right]^T$$

$$- \frac{2}{2}[1, -1, 0]^T$$

$$= \left[-\frac{4}{9}, -\frac{4}{9}, -\frac{2}{9}\right]^T$$

$$\| Y_1 \| = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$$

$$\| Y_2 \| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 4} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\| Y_3 \| = \sqrt{\frac{16}{81} + \frac{16}{81} + \frac{4}{81}} = \frac{2}{3}$$

G_1, G_2, G_3 என்பவை தேவையான அலகுச் செங்குத்து வெக்டர்கள் எனில்,

$$G_i = \frac{Y_i}{\| Y_i \|}, \; i = 1, 2, 3$$

$$\therefore \; G_1 = \left[\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0\right]^T$$

$$G_2 = \left[\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}, -2\frac{\sqrt{2}}{3}\right]^T$$

$$G_3 = \left[-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right]^T$$

§ 63·3. n பரிமாண வெளியில் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக அமைந்துள்ள $X_1, X_2, \ldots X_n$ என்னும் n வெக்டர்கள் ஒருபடித் தொடர்பிலாதவை.

நிறுவல்

$$k_1X_1 + k_2X_2 + \ldots k_nX_n = 0 \qquad \ldots (1)$$

($k_1, k_2, \ldots k_n$ ஆகியவை எண்ணிகள்) என்பது பொருந்திய சமன்பாடு எனில்,

$$k_1 = 0 = k_2 = \ldots = k_n$$

நிறுவுவது போதுமானது.

சமன்பாடு (1) ஐ X_i ஆல் எண்ணிப் பெருக்கியாகப் பெருக்குக.

$$X_i \cdot \sum_{r=1}^{n} k_rX_r = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots n) \qquad \ldots (2)$$

இப்பொழுது, $X_1, X_2, \ldots X_n$ ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான வெக்டர்களாதலால்,

$$X_i \cdot X_r = 0, \qquad r \neq i$$
$$= |X_i|^2 \neq 0, \qquad r = i$$

எனவே சமன்பாடு (2)–லிருந்து

$$k_i |X_i|^2 = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

$|X_i|^2 \neq 0$ என்பதால், $k_i = 0 \quad (i = 1, 2. \ldots n)$

அதாவது (1) பொருந்திய சமன்பாடு எனில்,

$$k_1 - k_2 = \ldots k_n = 0$$

எனவே, $X_1, X_2, \ldots X_n$ ஆகிய ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான வெக்டர்கள் ஒருபடித் தொடர்பிலாதவை.

§ 63·4. வரைவிலக்கணம்

மெய் எண்களை மூலங்களாகக் கொண்ட ஒரு சதுர அணி A ஆனது

$AA^T = A^TA = I$ அல்லது $A^T = A^{-1}$ என்னும் நிபந்தனைக்குட்பட்டால், அந்த அணிக்குச் செங்குத்து அணி (orthogonal matrix) என்று பெயர்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$= A \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

ஒரு செங்குத்து அணி.

$$A^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A^TA = I$$

[குறிப்பு (1) : $AA^T = A^TA = I$ என்பதிலிருந்து A-ன் நிரை (நிரல்) வெக்டர்கள் ஒவ்வொன்றின் தனிப்பெறுமானம். 1 அலகு என்பதும் அவை ஒன்றுக் கொன்று செங்குத்தானவை என்பதும் எளிதில் புலப்படும்.

(2) § 6·32-ல் விளக்கிய முறையைப் பயன்படுத்தி $X_1, X_2, \ldots X_n$ என்ற ஒருபடித் தொடர்பிலா வெக்டர்களை நிரை (நிரல்)-களாகக்கொண்ட ஒரு சதுர அணியை ஒரு செங்குத்து அணியாக மாற்றியமைக்க இயலும்.]

§ 64. செங்குத்து அணிகளின் பண்புகள்

§ 64·1. சதுர அணி A ஒரு செங்குத்து அணியானால் அதன் திருப்பு அணி A^T-யும், நேரெதிர் அணி A^{-1}-ம் செங்குத்து அணிகளாகும்.

A செங்குத்து அணி என்பதால் $A^T = A^{-1}$ ... (1)

A^T ஐ B எனக் குறிப்பிட்டு, 1 ஐ

$B = A^T$ என எழுதலாம்.

$$\therefore \quad B^T = (A^{-1})^T = (A^T)^{-1} \qquad (\S\, 24)$$
$$= B^{-1}$$

எனவே, $B = A^T$-ம் செங்குத்து அணியாகும்.

மேலும், $C = A^{-1}$ எனக் குறித்து, (1) ஐ

$C = A^T$ என எழுதலாம்.

$$\therefore \quad C^{-1} = (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \qquad (\S\, 24)$$
$$= C^T$$

எனவே, $C = A^{-1}$-ம் செங்குத்து அணியாகும்.

§ 64·2· A, B என்ற செங்குத்து அணிகளிலிருந்து பெருக்கி வந்த AB, BA என்ற அணிகளும் செங்குத்து அணிகளாகும்.

A, B ஆகியவை தனித்தனியே செங்குத்து என்பதால்,

$$AA^T = A^TA = I \qquad \dots \quad (1)$$
$$BB^T = B^TB = I \qquad \dots \quad (2)$$

இப்போது, $(AB)(AB)^T = ABB^TA^T$ (§ 20)

$= AIA^T$ [சமன்பாடு (2)]

$= A\,A^T$

$= I$ [சமன்பாடு (1)]

இதேபோல், $(AB)^T(AB) = I$ என நிறுவலாம்.

$$\therefore \quad (AB)\,(AB)^T = (AB)^T\,(AB) = I$$

எனவே, AB-ம் ஒரு செங்குத்து அணியாகும். இவ்வாறே BA-ம் ஒரு செங்குத்து அணி என நிறுவலாம்.

§ **64·3.** **ஒரு செங்குத்து அணியின் அணி கோவை மதிப்பு ± 1 ஆகும்.**

A செங்குத்து அணி என்பதால் $AA^T = A^TA = I$

$\therefore \quad |A| \cdot |A^T| = |I| = 1$

ஆனால், $|A^T| = |A| \quad \therefore \quad |A|^2 = 1$

அதாவது, $|A| = \pm 1$

§ **64·4.** **λ ஒரு செங்குத்து அணியின் தனித்தன்மை மூலம் என்றால், $\frac{1}{\lambda}$-ம் அதன் தனித்தன்மை மூலம் ஆகும்.**

கொடுத்துள்ள அணியின் தரம் (n, n) என்றும், அதன் தனித்தன்மை மூலங்கள் $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ என்றும் கொள்வோம்.

§51-ல் A^T-ன் தனித்தன்மை மூலங்களும் $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ ஆகியவைதான் என்றும், §53-ல் A^{-1}-ன் தனித்தன்மை மூலங்கள் $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \ldots \frac{1}{\lambda_n}$ என்றும் பார்த்தோம்,

A ஒரு செங்குத்து அணி என்பதால் $A^T = A^{-1} \quad \therefore \quad A^T$-ன் தனித்தன்மை மூலங்களும் A^{-1}-ன் தனித்தன்மை மூலங்களும் ஒன்றேயாகும்.

அதாவது, $\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda_2}, \ldots \frac{1}{\lambda_n}$ என்பவைகளும் A-ன் தனித்தன்மை மூலங்களேயாகும்.

[குறிப்பு: A-ன் தனித்தன்மை மூலங்கள் $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ மற்றும் $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \ldots \frac{1}{\lambda_n}$ என்பதால் A-க்கு $2n$ தனித்தன்மை மூலங்கள் உண்டு என்று பொருளல்ல, $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \ldots \frac{1}{\lambda_n}$ என்ற மூலங்களும் $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ என்ற மூலங்களும் வெவ்வேறு வரிசையில் எழுதப்பட்ட மூலங்களின் தொடர் என்று அறிய வேண்டும். இதிலிருந்து $|A - \lambda I| = 0$ என்ற தனித்தன்மைச் சமன்பாடு ஒரு தலைகீழ்ச்சமன்பாடு (Reciprocal equation) என்பது தெளிவாகிறது.]

§ 65. செங்குத்து நிலைமாற்றம் (Orthogonal transformation)

வரைவிலக்கணம் : ஒரு செங்குத்து அணியை நிலைமாற்ற அணியாகக் கொண்ட ஒருபடி நிலைமாற்றம் செங்குத்து நிலைமாற்றம் (Orthogonal transformation) எனப்படும்.

§ 45-ல் கோணம் θ அளவு அச்சுச் சுழற்சியால், கொடுத்துள்ள ஒரு புள்ளி P-ன் ஆயத் தொலைகள் (x_1, x_2)-லிருந்து (y_1, y_2) ஆக மாற்றும்போது

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \cos\theta \cdot x_1 + \sin\theta \cdot x_2 \\ y_2 &= \sin\theta \cdot x_1 + \cos\theta \cdot x_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (1)$$

என்ற ஒருபடி நிலைமாற்றச் சமன்பாடுகள் கிடைக்கும் எனக் கண்டோம்.

இதிலுள்ள நிலைமாற்ற அணி $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad A^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$AA^T = \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & 0 \\ 0 & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

மேலும் $A^T A = I$

$$\therefore \quad AA^T = A^T A = I$$

எனவே, சுழற்சியாலான அச்சு மாற்றத்திலிருந்து கிடைக்கப் பெறும் நிலைமாற்ற அணி ஒரு செங்குத்து அணி என்பது புலனாகிறது.

§ 66. தேற்றம்

செங்குத்து நிலைமாற்றத்தால் இரண்டு புள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள தூரம் மாறுவதில்லை.

$$Y = AX \quad \ldots (1)$$

என்பது ஒரு செங்குத்து நிலைமாற்றத்தைக் குறிக்கட்டும்.

Ox_1, Ox_2, Ox_3 என்ற பழைய அச்சுகளைக் குறித்து P என்ற புள்ளியின் ஆயத் தொலைகளை

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$ என்ற நிரல் வெக்டரால் குறிப்போம்.

மேற்கண்ட செங்குத்து நிலைமாற்றத்தால் Q என்ற புதிய புள்ளி P-ன் எதிருருவம் (image) என்போம். $O'Y_1$, $O'Y_2$, $O'Y_3$ என்ற புதிய அச்சுகளைக் குறித்து Q-ன் ஆயத் தொலைவுகளை

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$ என்ற நிரல் வெக்டரால் குறிப்போம்.

$$\therefore \quad X^TX = [x_1 \; x_2 \; x_3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2]$$

இதேபோல், $Y^TY = [y_1{}^2 + y_2{}^2 + y_3{}^2]$

$\therefore \quad | X^TX | = OP$; $\quad | Y^TY | = O'Q$

ஆனால், (1)-லிருந்து $Y^T = (AX)^T = X^TA^T$. ... (2)

சமன்பாடு (1) ஒரு செங்குத்து நிலைமாற்றத்தைக் குறிப்பதால், $A^TA = AA^T = I$ ... (3)

(2) ஐயும் (1) ஐயும் பெருக்கினால்

$$Y^TY = X^TA^TAX = X^TIX \text{ (சமன்பாடு (3))}$$
$$= X^TX$$

$\therefore \quad | Y^TY | = | X^TX |$

அதாவது, $OP = O'Q$

§ **67.** கலப்புச் செங்குத்து அணி (Unitary or Complex orthogonal matrix)

A என்ற அணியின் மூலங்கள் கலப்பு எண்களால் (complex numbers) ஆனவை என்போம். அந்தக் கலப்பு எண்களின் இணைக் கலப்பு எண்களால் (conjugate complex numbers) ஆன அணியை இணை அணி (conjugate matrix) என்பார். அதை $\bar{A}$ என்று நாம் குறிப்பிடுவோம். $\bar{A}$-ன் திருப்பு அணியை $\bar{A}^T$ என்று குறிப்பது வழக்கம். (சிலர் அதை A^{θ} என்றும் குறிப்பதுண்டு.) $\bar{A}^T$ ஐ *A*-ன் திருப்பு இணை அணி (transpose of the conjugate or associate) என்பர்.

கலப்பு எண்களை மூலங்களாகக் கொண்ட சதுர அணி *A* ஆனது

$$A\bar{A}^T = \bar{A}^TA = I \text{ அல்லது } \bar{A}^T = A^{-1}$$

என்ற நிபந்தனைக்குட்பட்டால் அந்த அணிக்குக் கலப்புச் செங்குத்து அணி (Unitary matrix) என்று பெயர்.

[குறிப்பு : *A* என்பது மெய்யெண்களால் ஆன மூலங்களைக் கொண்ட அணி என்றால் $\bar{A} = A$; மற்றும் $\bar{A}^T = A^T$. எனவே, அந்த அணி *A* ஒரு மெய்ச் செங்குத்து அணி ஆகும். இதிலிருந்து கலப்புச் செங்குத்து அணியின் பண்புகளிலிருந்து மெய்ச் செங்குத்து அணியின் பண்புகளை அடைவது எளிது என்று புலனாகும்.]

§ **68.** கலப்புச் செங்குத்து அணியின் பண்புகள்

§ **68·1.** ஒரு கலப்புச் செங்குத்து அணியுன் திருப்பு இணையணியும், நேரெதிர் அணியும் கலப்புச் செங்குத்து அணிகளாகும்.

A என்பது ஒரு கலப்புச் செங்குத்து அணியானால்

$$\bar{A}^T = A^{-1} \quad \ldots \quad (1)$$

$B = \bar{A}^T$ என்று குறிப்பிட்டால், சமன்பாடு (1)

$$B = A^{-1} \text{ என மாறும்.}$$

$$\therefore \quad \bar{B} = \overline{(A^{-1})} = (\bar{A})^{-1}$$

$$\therefore \quad \bar{B}^{T} = \left[(\bar{A})^{-1} \right]^T = (\bar{A}^T)^{-1} = B^{-1}$$

எனவே, $B = \bar{A}^T$-ம் ஒரு கலப்புச் செங்குத்து அணியாகும். இவ்வாறே, A^{-1}-ம் ஒரு கலப்புச் செங்குத்து அணி என நிறுவலாம்.

§68-2. A, B என்ற இரண்டு கலப்புச் செங்குத்து அணிகளைப் பெருக்கி வந்த AB, BA என்ற அணிகளும் கலப்புச் செங்குத்து அணிகளாகும்.

A, B என்பவை கலப்புச் செங்குத்து அணிகள்.

$$\therefore \quad A\bar{A}^T = \bar{A}^T A = I \qquad \dots (1)$$

$$B\bar{B}^T = \bar{B}^T B = I \qquad \dots (2)$$

$$(AB)\,\overline{(AB)}^T = (AB)\,(\bar{A}\,\bar{B})^T$$
$$= (AB)\,(\bar{B}^T\,\bar{A}^T)$$
$$= A\,(B\,\bar{B}^T)\,\bar{A}^T$$
$$= B\,I\bar{A}^T \text{ [சமன்பாடு (2)]}$$
$$= A\,\bar{A}^T$$

அதாவது, $(AB)\,\overline{(AB)}^T = I$

இதேபோல், $\overline{(AB)}^T\,(AB) = I$

$\therefore$ AB என்ற அணி கலப்புச் செங்குத்து அணியாகும். இதேபோல், BA-ம் ஒரு கலப்புச் செங்குத்து அணியாகும்.

§ 68-3. ஒரு கலப்புச் செங்குத்து அணியின் அணிகோவை மட்டு (அல்லது தனிப் பெறுமானம்) $= 1$

A என்பது ஒரு கலப்புச் செங்குத்து அணி என்பதால்

$$A\bar{A}^T = \bar{A}\,A^T = I \;,$$

$$\therefore \quad |\,A\bar{A}^T\,| = |\,I\,| = 1$$

அதாவது, $|\,A\,| \cdot |\,\bar{A}^T\,| = 1$

ஆனால், $|\,\bar{A}^{-T}\,| = |\,\bar{A}\,| = |\,A\,|$

$$\therefore \quad |\,A\,| \cdot |\,A\,| = |\,A\,|^2 = 1$$

$\therefore$ A-ன் தனிப்பெறுமானம் $= 1$

§ **68-4.** ஒரு கலப்புச் செங்குத்து அணியின் எல்லா தனித் தன்மை மூலங்களின் மட்டு (அல்லது தனிப்பெறுமானம்) **1** ஆகும்.

கலப்புச் செங்குத்து அணி A-ன் ஒரு தனித்தன்மை மூலம் λ என்றும், அதனின்று பெறும் தனித்தன்மை வெக்டர் X என்றும் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad AX = \lambda X \qquad \ldots (1)$$

(1)-ன் இணைச் சமன்பாடு

$$\bar{A}\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X}$$

$$\therefore \quad (\bar{A}\bar{X})^T = (\bar{\lambda}\bar{X})^T = \bar{\lambda}\bar{X}^T$$

(λ என்பது ஒரு கலப்பு எண், வெக்டர் அல்ல)

அதாவது, $\bar{X}^T\bar{A}^T = \bar{\lambda}\bar{X}^T \qquad \ldots (2)$

(1) ஐயும் (2) ஐயும் பெருக்கினால்

$$\bar{X}^T\bar{A}^T AX = \bar{\lambda}\bar{X}^T\lambda X = \lambda\bar{\lambda}\bar{X}^T X$$

ஆனால் A ஒரு கலப்புச் செங்குத்து அணி என்பதால்,

$$\bar{A}^T A = I$$

$$\therefore \quad \bar{X}^T I X = \lambda\bar{\lambda}\bar{X}^T X$$

அதாவது, $\bar{X}^T X = \lambda\bar{\lambda}\bar{X}^T X$

$$\therefore \quad (1-\lambda\bar{\lambda})\bar{X}^T X = [0] \qquad \ldots (3)$$

இப்போது, $X = \begin{bmatrix} a_1 + ib_1 \\ a_2 + ib_2 \\ \vdots \\ a_n + ib_n \end{bmatrix}$ என்றால்,

$$\bar{X}^T = [a_1 - ib_1, \; a_2 - ib_2, \; \ldots \; a_n - ib_n]$$

$$\therefore \bar{X}^T X = [(a_1^2+b_1^2) + (a_2^2+b_2^2) + \ldots + (a_n^2+b_n^2)]$$

$$\neq [0] \quad \{\because X \neq 0\}$$

$\therefore \quad 1 - \lambda\bar{\lambda} = 0$; அதாவது, $\lambda\bar{\lambda} = 1$

$\therefore \quad |\lambda|^2 = 1$, அல்லது $|\lambda| = 1$

துணை முடிவு

மெய்ச் செங்குத்து அணிக்கும் மேற்கூறிய முடிவு பொருந்துமாதலால், ஒரு மெய்ச் செங்குத்து அணியின் கலப்பு தனித் தன்மை மூலங்களின் மட்டு (அல்லது தனிப் பெறுமானம்) 1 ஆகும். அதாவது கலப்பு மூலங்கள் $\cos\theta \pm i\sin\theta$ என்ற வடிவத்தில் இருக்கும். மெய் தனித் தன்மை மூலங்கள் 1 அல்லது -1 ஆக இருக்க வேண்டும்.

§ **68·5.** ஒரு கலப்புச் செங்குத்து அணியின் ஒரு தனித் தன்மை மூலம் λ என்றால், $\frac{1}{\lambda}$ -ம் அதன் தனித்தன்மை மூலம் ஆகும்.

λ என்பது சதுர அணி A-ன் ஒரு தனித்தன்மை மூலம் என்றால், $\frac{1}{\lambda}$ என்பது A^{-1}-ன் ஒரு தனித்தன்மை மூலம் என்று § 53-ல் பார்த்தோம்.

மேலும், A, $\bar{A}$, $\bar{A}^T$ ஆகியவற்றின் தனித்தன்மை மூலங்கள் ஒன்றே ஆகும்.

A ஒரு கலப்புச் செங்குத்தணி என்றால் $\bar{A}^T = A^{-1}$. எனவே, $\bar{A}^T$-ன் தனித்தன்மை மூலங்கள் அதாவது, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ என்பவையும் A^{-1}-ன் தனித்தன்மை மூலங்கள் அதாவது, $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \ldots \frac{1}{\lambda_n}$ என்பவையும் ஒரே கணத்தைக் குறிக்கும்.

மாதிரிக்கணக்கு (1)

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

என்பது ஒரு செங்குத்து அணி என நிறுவுக.

இங்கே $A^T = A$

$$\therefore\ A \cdot A^{T} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= I$$

$\therefore$ A என்பது ஒரு செங்குத்து அணி

மாதிரிக்கணக்கு **(2)**

$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ என்பது ஒரு செங்குத்து அணி ஆவதற்கான நிபந்தனை யாது? $a_1 = \cos\theta$, $b_1 = \cos\phi$ என்றால் எத்தனை வெவ்வேறான செங்குத்து அணிகள் கிடைக்கும்?

$$AA^{T} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore\ a_1^2 + a_2^2 = 1$ ... (1)

$b_1^2 + a_2^2 = 1$ ... (2)

$a_1 b_1 + x_2 b_2 = 0$ ... (3)

$a_1 = \cos\theta$, $ab_1 = \cos\phi$ என்றால்,

$a_2 = \pm \sin\theta$; $b_2 = \pm \sin\phi$

(3)-லிருந்து $\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi = 0$

அல்லது $\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi = 0$

$\therefore \quad \cos(\theta-\phi) = 0$ அல்லது $\cos(\theta-\phi) = 0$

$\therefore \quad \phi = \frac{\pi}{2} + \theta$ அல்லது $\frac{\pi}{2} - \theta$

$\therefore \quad \cos\phi = -\sin\theta$ அல்லது $\sin\theta$

ஆகவே, $a_1 = \cos\theta, \quad b_1 = \mp\sin\theta$

$a_2 = \pm\sin\theta, \quad b_2 = \pm\cos\theta$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

ஆகிய நான்கு செங்குத்து அணிகள் கிடைக்கும்.

ஆனால், $$\begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

மற்றும், $$\begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ -\sin(-\theta) & -\cos(-\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \ldots \quad (A)$$

மற்றும் $$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \quad \ldots \quad (B)$$

ஆகிய இரண்டு வெவ்வேருன செங்குத்து அணிகள் கிடைக்கின்றன. $0 < \theta \leq 2\pi$ என்பதால் (2, 2) தரமுள்ள எல்லாச் செங்குத்து அணிகளும் (A), (B)-களில் அடங்கியுள்ளன.

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = +1 ; \quad \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{vmatrix} = -1$$

மாதிரிக்கணக்கு (3)

$$\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1+2i & -4-2i \\ 2-4i & -2-i \end{bmatrix}$$ என்பது

ஒரு கலப்புச் செங்குத்து அணி என்று காண்பிக்கவும்.

கொடுத்துள்ள அணியை A என்று குறித்தால்,

$$\bar{A}^T = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1-2i & 2+4i \\ -4+2i & -2-i \end{bmatrix}$$

$$\therefore \; A\bar{A}^T = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 5+20 & 10-10 \\ 10-10 & 20+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= I$$

$\therefore$ A ஒரு கலப்புச் செங்குத்து அணி ஆகும்.

மாதிரிக்கணக்கு (4)

$$A = \begin{bmatrix} a+ic & -b+id \\ b+id & a-ic \end{bmatrix}$$

என்பது ஒரு கலப்புச் செங்குத்து அணி என்ருல்.
$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ என்று நிறுவுக.

இங்கே, $\bar{A}^T = \begin{bmatrix} a-ic & b-id \\ -b-id & a+ic \end{bmatrix}$,

$$\therefore \quad A\,\bar{A}^{T} = \begin{bmatrix} a+ic & -b+id & a-ic & b-id \\ b+id & a-ic & -b-id & a+ic \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2+c^2+b^2+d^2 & (a+ic)(b-id-b+id) \\ (a-ic)(b+id-b-id) & b_2+d_2+a_2\,c_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & O \\ O & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{bmatrix}$$

கலப்புச் செங்குத்து அணி என்பதால்

$$A\bar{A}^{T} = I \qquad \therefore \quad a^2+b^2+c^2+d^2 = 1$$

பயிற்சி 8 (b).

1. கீழ்வருவன செங்குத்து அணிகள் என்று நிறுவுக.

(1) $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -3 & -2 & 6 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ (2) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

[M. Sc. '65]

(3) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

(5) $\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ (6) $\begin{bmatrix} 0 & 2m & n \\ l & m & -n \\ l & -m & n \end{bmatrix}$

$$\left(l = \frac{1}{\sqrt{2}},\ m = \frac{1}{\sqrt{6}},\ n = \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

II. (a) $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$ என்பது

ஒரு செங்குத்து அணி என்றால் a, b, c என்பவை $x^3 \pm x^2 + p = 0$ என்ற சமன்பாடுகளின் மூலங்களாக இருக்கவேண்டும் என நிறுவுக.

(b) ஒரு செங்குத்து அணியின் தனித்தன்மை மூலங்களின் பெருக்குத் தொகை ± 1 என நிறுவுக.

(c) ஒரு (4, 4) தரமுள்ள செங்குத்து அணியின் இரண்டு தனித்தன்மை மூலங்கள் a, b என்றால், மற்ற தனித்தன்மை மூலங்கள்

$$abx^2 - (a+b)y + 1 = 0$$

என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும் என்று நிறுவுக $(ab \neq 1)$.

III. பின்வருவன கலப்புச் செங்குத்து அணி என்று நிறுவுக :

(1) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{bmatrix}$

(2) $$\frac{1}{29}\begin{bmatrix} -9+8i & -10-4i & -16-18i \\ -2-24i & 1+12i & -10-4i \\ 4-10i & -2-24i & -9+8i \end{bmatrix}$$

(3) $$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+i) & \frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{3+i}{2\sqrt{15}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{4+3i}{2\sqrt{15}} \\ \frac{1}{2} & \frac{-i}{\sqrt{3}} & \frac{5i}{2\sqrt{15}} \end{bmatrix}$$

9. மெய் சமச்சீர் அணிகளும், இருபடிக்கோவை அமைப்புகளும்

(Real Symmetric Matrices and Quadratic Forms)

§ 69. மெய் சமச்சீர் அணி (Real symmetric matrix)

மெய்யெண்களை மூலங்களாகக் கொண்ட ஒரு சதுர அணி

$$A = A^T$$

என்ற நிபந்தனைக்குட்பட்டால் அதற்கு மெய் சமச்சீர் அணி என்று பெயர்.

ஆனால், அது $A = -A^T$

என்ற நிபந்தனைக்குட்பட்டால் அதற்கு மெய் எதிர்ச்சீர் அணி (real skew symmetric matrix) என்று பெயர்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$\begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}$$ என்பது ஒரு மெய் சமச்சீர் அணி.

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$ என்பது ஒரு மெய் எதிர்ச்சீர் அணி.

[குறிப்பு : (1) $A = [a_{ij}]$ $i, j = 1, 2, \ldots n$ என்க.

$\therefore \quad A = A^T$ என்றால், $a_{ij} = a_{ji}$ என்பதும்

$A = -A^T$ என்றால், $a_{ij} = -a_{ji}$ என்பதும் தெளிவாகிறது.

(2) $j = i$ என்றால், $a_{ij} = -a_{ji}$ என்ற சமன்பாடு $a_{ii} = -a_{ii}$ என மாறும்.

அதாவது $a_{ii} = 0$ ஆகும்.

எனவே, ஒரு மெய் எதிர்ச்சீர் அணியின் தலையாய மூலைவிட்ட மூலங்கள் அனைத்தும் சுழியாகும்.

(3) A ஒரு சதுர அணி எனில், $A + A^T$ ஒரு சமச்சீர் அணி ; $A - A^T$ ஓர் எதிர்ச் சீர் அணி.]

நிறுவல்:

$$(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A$$
$$= A + A^T$$

எனவே, $A + A^T$ ஒரு சமச்சீர் அணியாகும்.

மேலும், $(A - A^T) = -(A - A^T)$ என்பதால் இது எதிர்ச் சீர் அணியாகும்.

(4) பூச்சியமில் கோவை சமச்சீர் அணி ஒன்றின் நேரெதிர் அணியும் சமச்சீர் அணியாகும்.

A சமச்சீர் அணி எனில், $A^T = A$

$\therefore \quad (A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$

அதாவது, A^{-1} ஒரு சமச்சீர் அணி.

(5) எந்த ஒரு சதுர அணியையும் ஒரு சமச்சீர் அணி, ஓர் எதிர்ச் சீர் அணி ஆகிய இரண்டின் கூட்டுத் தொகை அணியாக மாற்றியமைக்கலாம்.

குறிப்பு (3)–ல் விளக்கியவாறு, A ஒரு சதுர அணி எனில்,

$B = \frac{1}{2}(A + A^T)$ ஒரு சமச்சீர் அணி

$C = \frac{1}{2}(A - A^T)$ ஓர் எதிர்ச்சீர் அணி

ஆனால், $B + C = A$

அதாவது, $A =$ ஒரு சமச்சீர் அணி $+$ ஓர் எதிர்ச்சீர் அணி.

(6) சமச்சீர் அணி ஒன்றின் சேர்ப்பு அணியும் சமச்சீர் அணியாகும்.

A ஒரு சமச்சீர் அணி எனில், $A^T = A$

ஆனல், $A\,(adj\ A) \quad = (adj\ A)\,A = |A|\,I \qquad$ (§ 21·1)

$\therefore \qquad (adj\ A) \quad = |A|^{-1} = |A|\,A^{-1}$

இப்போது, $(adj\ A)^T = (\,|A|\,A^{-1})^T$

$= |A|\,)A^{-1})^T$, [$|A|$ ஓர் எண்ணணி]

$= |A|\,(A^T)^{-1}$

$= |A|\,A^{-1}, \; (A^T = A)$

$\therefore \quad (adj\ A)^T = (adj\ A)$

அதாவது, $(adj\ A)$-ம் சமச்சீர் அணியே.

(7) A, B என்பவை சமச்சீர் அணிகளெனில், AB-ம் சமச்சீர் அணியாக இருப்பதற்குத் தேவையானதும் போதுமானதுமான நிபந்தனை; A-ம், B-ம் பெருக்கற் பரிமாற்று விதிக்குட்பட்டதாக அமைவதாகும்.

நிபந்தனை தேவையானது

A-ம், B-ம் சமச்சீர் அணிகளென்பதால்,

$A^T = A: \qquad B^T = B$

A - ம் B - ம் பெருக்கற் பரிமாற்று விதிக்குட்பட்டதெனில்,

$AB = BA$

எனவே, $(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$

அதாவது, AB-ம் சமச்சீர் அணியாகும்.

நிபந்தனை போதுமானது

AB ஒரு சமச்சீர் அணி என்றல்,

$(AB)^T = AB$

ஆனல், $(AB)^T = B^T A^T = AB$

$\therefore \quad AB = BA$

§ 70. மெய்சமச்சீர் எதிர்ச்சீர் அணிகளின் பண்புகள்

§ 70·1. ஒரு மெய் சமச்சீரணியின் எல்லா தனித்தன்மை மூலங்களும் மெய்யெண்களாகும்.

A என்ற மெய் சமச்சீரணியின் ஒரு தனித் தன்மைமூலம், λ என்றும், அதனின்று பெறப்படும் தனித்தன்மை வெக்டர் X என்றும் எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad AX = \lambda X \qquad \dots \quad (1)$$

(1)-லிருந்து கிடைக்கும் இணைச் சமன்பாடு

$$\bar{A}\bar{X} = \bar{\lambda}\,\bar{X}$$

A ஒரு மெய் அணி என்பதால் $\bar{A}=A$

$$\therefore \quad A\,\bar{X} = \bar{\lambda}\,\bar{X}$$

$$\therefore \quad (A\bar{X})^T = (\bar{\lambda}\,\bar{X})^T = \bar{\lambda}\,\bar{X}^T$$

(λ ஒரு கலப்பு எண், வெக்டரல்ல.)

அதாவது, $\bar{X}^T A^T = \bar{\lambda}\,\bar{X}^T$

அதாவது, $\bar{X}^T A = \bar{\lambda}\,\bar{X}^T \; (\because \; A^T = A)$

இதை X ஆல் பின் காரணியாகப் பெருக்கினால்,

$$\bar{X}^T A X = \bar{\lambda}\,\bar{X}^T X \qquad \dots \quad (2)$$

இப்போது, (1) ஐ $\bar{X}^T$ ஆல் முன்காரணியாகப் பெருக்கினால்

$$\bar{X}^T A X = \lambda\,\bar{X}^T X \qquad \dots \quad (3)$$

$$(3)-(2); \quad (\lambda-\bar{\lambda})\,\bar{X}^T X = [0] \qquad \dots \quad (4)$$

$X = \begin{bmatrix} a_1 + ib_1 \\ a_2 + ib_2 \\ \dots \\ a_n + ib_n \end{bmatrix}$ என்றால் $\bar{X}^T = [a_1 - ib_1, \dots a_n - ib_n]$

$$\therefore \quad \bar{X}^T X = [(a_1^2 + b_1^2) + (a_2^2 + b_2^2) + \dots (a_n^2 + b_n^2)]$$
$$\neq [0]$$

$$\therefore \quad \lambda - \bar{\lambda} = 0 \quad \text{அல்லது} \quad \lambda = \bar{\lambda}$$

அதாவது. λ ஒரு மெய்யெண் ஆகும்.

§ **70·2.** **ஒரு மெய் எதிர்ச் சீரணியின் எல்லா தனித்தன்மை மூலங்களும் கற்பனை எண்களாகும்.**

§ 70·1-ல் விளக்கிய முறையை மேற்கொண்டு $A^T = -A$ என்ற மாறுதல் செய்யவேண்டும். இதனால் சமன்பாடு (4)

$$(\lambda + \overline{\lambda})\,\overline{X}^T X = [0]$$

என மாறும்.

$\overline{X}^T X \neq [0]$ என்பதால் $\lambda + \overline{\lambda} = 0$

அல்லது $\lambda = -\overline{\lambda}$

$\therefore$ λ என்பது ஒரு தூய கற்பனை எண் ஆகும்.

§ **70·3.** **மெய்சமச்சீரணி A-ன் வெவ்வேறு தனித்தன்மை மூலங்களான λ_i, λ_j ஆகியவற்றிலிருந்து கிடைக்கப் பெறும் முறையே X_i, X_j என்ற தனித்தன்மை வெக்டர்கள் செங்குத்து வெக்டர்களாகும்.**

அதாவது, $X_i^T X_j = [0]$

இப்போது, $AX_i = \lambda_i X_i$ ... (1)

$AX_j = \lambda_j X_j$ ... (2)

(1)-லிருந்து $(AX_i)^T = \lambda_i X_j^T$

அதாவது, $X_i^T A^T = \lambda_i X_i^T$

A என்பது சமச்சீரணியாதலால் $A^T = A$

$$\therefore \quad X_i^T A = \lambda_i X_i^T$$

X_j ஐப் பின்காரணியாகப் பெருக்கினால்

$$X_i^T AX_j = \lambda_i X_i^T X_j \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

சமன்பாடு (2) ஐ X_i^T ஆல் முன்காரணியாகப் பெருக்கினால்

$$X_i^T AX_j = \lambda_j X_i^T X_j \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

சமன்பாடுகள் (3), (4) ஆகியவற்றிலிருந்து

$$(\lambda_i - \lambda_j) X_i^T X_j = [0]$$

λ_i, λ_j வெவ்வேறானவை என்பதால் $\lambda_i \neq \lambda_j$

$$\therefore \quad X_i^T X_j = [0]$$

அதாவது, X_i, X_j ஆகியவை செங்குத்துத் தனித்தன்மை வெக்டர்களாகும்.

§ 71. ஒருங்கிசைவு மாற்றங்களும் ஒருங்கிசைவு அணிகளும் (Congruent transformations and Congruent Matrices)

வரைவிலக்கணம் (1) :

ஒரு சதுர அணியில் ஒருவகை நிரை முதனிலை மாற்றமும் அதைத் தொடர்ந்து அதே வகை நிரல் முதனிலை மாற்றமும் செயல்படுத்தினால், அந்த நிரை தொடர் நிரல் இரட்டை முதனிலை மாற்றங்களுக்கு ஒருங்கிசைவு மாற்றங்கள் (Congruent transformations) என்று பெயர்.

§ 29·1-ல் விளக்கிய குறியீடுகளுடன்

(i) $R_i \rightleftarrows R_j$ பின்னர் $C_i \rightleftarrows C_j$

(ii) $R_i \to kR_i$ பின்னர் $C_i \to kC_i$

(iii) $R_i \to R_i + kR_j$ பின்னர் $C_i \to C_i + kC_j$

ஆகியவை மூன்று வகையான ஒருங்கிசைவு மாற்றங்களாகும்.

வரைவிலக்கணம் (2) :

சதுர அணி A-ல் ஒன்று அல்லது ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட ஒருங்கிசைவு மாற்றங்களைச் செயல்படுத்திக் கிடைக்கப் பெறும் சதுர அணி B எனில், B ஐ A-ன் ஒருங்கிசைவு அணி (Congruent matrix) என்பர். இந்த ஒருங்கிசைவுத் தொடர்பினை $B \, C \, A$ என்று குறிப்பது வழக்கம். சிலர் $B \equiv A$ என்றும் எழுதுவர்.

$B \, C \, A$ மற்றும் $A \, C \, B$ என்றும், $A \, C \, B$ மற்றும் $B \, C \, F$ எனில், $A \, C \, F$ என்றும் எளிதில் அறியலாம்.

[குறிப்பு : ஒருங்கிசைவுச் செய்கைகளும் முதனிலைச் செய்கைகளே யாதலால், ஒருங்கிசைவு அணிகளின் அளவைகளும் சமமாதல் வேண்டும்].

§ 72. தேற்றம்

E என்பது ஒரு முதனிலை அணியைக் குறிப்பதாகக் கொள்வோம். A-ம் B-ம் ஒருங்கிசைவு அணிகளெனில், $B = E^T AE$.

நிறுவல் :

ρ என்பது ஒருவகை நிரை முதனிலைச் செய்கையையும் σ என்பது அதே வகை நிரல் முதனிலைச் செய்கையையும் குறிப்பதாகக் கொள்வோம். மேலும், $\rho(I) = E_\rho$ என்றும், $\sigma(I) = E_\sigma$ என்றும் குறிப்போம்

B-ம் A-ம் ஒருங்கிசைவு ஆதலின்

$$B = \sigma\,(\rho A)$$
$$= \sigma\ \{\rho\,(IA)\}\quad (\because\ IA = A)$$
$$= \sigma\ \{(\rho I)\,A\}\quad (\S\,34{\cdot}2)$$
$$= \sigma\ \{E_\rho\,A\}$$
$$= E_\rho\,\sigma(A)$$
$$= E_\rho\,\sigma\,(AI)\quad (\because\ AI = A)$$
$$= E_\rho\,A\,(\sigma I)\quad (\S\,34{\cdot}2)$$
$$= E_\rho\,A\,E_\sigma$$

ஆனால், $E_\rho = E_\sigma^{\,T}$

$$\therefore\quad B = E_\sigma^{\,T}\,A\,E_\sigma = E^T A E$$

§ 72·1. கிளைத் தேற்றம்

மேற்கண்ட விளைவைப் பொதுமைப்படுத்திப் பின்வருமாறு எழுதலாம் :

$A \subset B$ எனில்,

$$B = P_r^{\,T}\,P_{r-1}^{\,T} \ldots P_2^{\,T}\,P_1^{\,T}\,A\,P_1\,P_2 \ldots P_r$$
$$= P^T A\,P$$

இங்கு, $P_1\,P_2 \ldots P_r = P$ ஒரு பூச்சியமில் கோவை சதுர அணி.

§ 73. தேற்றம்

ஒரு சமச்சீர் அணிக்கு ஒருங்கிசைவாயுள்ள எந்த அணியும் சமச்சீர் அணியாகும்.

B என்ற அணி A என்ற அணிக்கு ஒருங்கிசைவு எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore\quad B = P^T AP,\ |P| \neq 0\ (\S\,72{\cdot}1)$$

ஆனால், $B^T = (P^T AP)^T = P^T A^T (P^T)^T$

$$= P^T AP\quad (\because\ A^T = A)$$
$$= B$$

$\therefore$ B ஒரு சமச்சீர் அணி.

§ 73·1. கிளைத்தேற்றம்

ஒரு சமமூலைவரை அணிக்கு ஒருங்கிசைவாயுள்ள எந்த ஓர் அணியும் சமச்சீர் அணியாகும்.

சமமூலைவரை அணிகளெல்லாம் சமச்சீர் அணிகள் என்று ஓர்க.

§ 74. ஒரு மெய்சமச்சீர் அணியின் அளவை r எனில், மெய் ஒருங்கிசைவு மற்றங்களால் அதனை சுழியல்லாத r மூலைவிட்ட மூலங்களைக் கொண்ட சமமூலைவரை அணியாக மாற்றியமைக்கலாம்.

$A = [a_{ij}] \, (i, j = 1, 2, \ldots n)$ என்பது ஒரு மெய் சமச்சீர் அணியைக் குறிப்பதாகக் கொள்வோம்.

$$A \text{ C } \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots dr, 0, 0, \ldots 0)$$

$d_k \neq 0, \; k = 1, 2, \ldots r$ என நிறுவுதல் வேண்டும்.

அதாவது முதலில் $a_{11} \neq 0$ எனக் கொள்வோம்.

A-ல் அமைந்துள்ள முதல் நிரை, நிரல்களிலுள்ள மூலங்களில் a_{11} ஐத் தவிர மற்ற மூலங்கள் அனைத்தும் சுழியாகுமாறு ஒருங்கிசைவு மாற்றம் செய்ய இயலும்.

அப்பொழுது,
$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \; 0 \; \ldots \; 0 \\ 0 & \\ 0 & \\ \vdots & A_1' \\ 0 & \end{bmatrix}$$

என்ற அணி A-க்கு ஒருங்கிசைவு ஆகும். §73-ல் கூறிய தேற்றத்தின்படி A_1' என்ற $(n-1, n-1)$ அணி சமச்சீர் அணியாகும். இங்கு $A_1' = [b_{ij}] \, (i, j = 1, 2, \ldots (n-1)$.

மேலே விளக்கிய முறையை மீண்டும் பயன்படுத்தி A_1'-ல் அமைந்துள்ள முதல் நிரை நிரல்களிலுள்ள மூலங்களில் b_{11} ஐத் தவிர மற்ற மூலங்கள் அனைத்தும் சுழியாகுமாறு ஒருங்கிசைவு மாற்றம் செய்யலாம்.

எனவே, $A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & & & A'_2 & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}$

என்ற அணி A-க்கு ஒருங்கிசைவாகும்.

இங்கு $A'_2 = [C_{ij}]$ என்பது ஒரு $(n-2, n-2)$ அணி

இவ்வண்ணமே r-முறை தொடர்ந்து செயல்படுத்திய பின்னர்

$$A_r = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{11} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c_{11} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A'_r & \end{bmatrix}$$

என்ற அணி A-க்கு ஒருங்கிசைவாகும். இங்கு A_r' என்பது ஒரு $(n-r, n-r)$ அணி

ஒருங்கிசைவு மாற்றங்களால் A-ன் அளவை மாறு என்பதாலும் $a_{11}, b_{11}, \dots r_{11}$ என்பவை சுழியல்ல என்பதாலும், A_r' என்ற அணி பூச்சிய அணியாதல் வேண்டும்.

$a_{11} = d_1$, $b_{11} = d_2$. ... ... $r_{11} = d_r$ என எழுதினால், A C diag $(d_1, d_2, \dots d_r, 0, \dots 0)$ என்பது பெறப்படும்.

(ஆ) அடுத்து $a_{11} = 0$ எனில், a_{ii} $(i = 2, 3, \dots n)$ ஆகியவற்றில் ஒன்றுவது சுழியல்ல எனக் கொள்ளலாம். அப்பொழுது $R_i \rightleftarrows R_1$, $C_i \rightleftarrows C_1$ என்னும் ஒருங்கிசைவுச் செய்கையால் A-ன் தலையாய மூலைவிட்ட முதல் மூலகம் சுழியல்லாத மூலகமாக

மாற்றப்பட்டு விடும். பின்னர் (அ)-ல் விளக்கியவாறு A ஐ ஒருங்கிசைவுச் செய்கைகளால் $\text{diag}\,(d_1, d_2, d_i, 0, 0)$ என்ற சம மூலை வரை அணியாக மாற்றியமைக்கலாம்.

(இ) இறுதியாக, A-ன் தலையாய மூலைவிட்ட மூலகங்கள் அனைத்தும் சுழி எனக் கொள்வோம்.

எடுத்துக்காட்டாக, $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix}$ எனில்

$R_1 \to R_1 + R_2$, $C_1 \to C_1 + C_2$ என்னும் ஒருங்கிசைவுச் செய்கைளால்

$$A \; C \begin{bmatrix} 2a & a \\ a & 0 \end{bmatrix}$$

மேலும், $R_2 \to R_2 \to \frac{1}{2} R_1$, $C_2 \to C_2 - \frac{1}{2} C_1$ என்ற ஒருங்கிசைவுச் செய்கையால்

$$A \; C \begin{bmatrix} 2a & 0 \\ 0 & -\frac{a}{2} \end{bmatrix} = \text{diag}\,(d_1, d_2)$$

எனவே, தேற்றத்தின் நிறுவல் முற்றுப் பெறுகிறது.

§ 74·1. ஒரு மெய் சமச்சீர் அணியை சமமூலை வரை அணியாக மாற்றியமைக்கும் பூச்சியமில் கோவை அணி காணல்.

A என்னும் (n, n) மெய் சமச்சீர் அணியானது $D = \text{diag}\,(d_1, d_2, \ldots d_r, 0, \ldots 0)$ என்னும் சமமூலைவரைக்கு ஒருங்கிசைவு எனில் $D = P^T A P$ எனப் பொருந்துமாறு P என்ற பூச்சியமில் கோவை அணியைக் காண இயலும் என § 74-ல் விளக்கிய தேற்றத்தை § 72·1-ல் விளக்கிய கிளைத் தேற்றத்தோடு இணைத்து நோக்கி அறியலாம். நடைமுறையில் P ஐக் காண்பதற்குப் பின்வரும் வழியை மேற்கொள்ளலாம்.

ρ என்பது ஒருவகை நிரை முதனிலை மாற்றத்தையும், σ என்பது அதே வகை நிரல் முதனிலை மாற்றத்தையும் குறிப்பதாகக் கொள்வோம்.

A-ல் ρ என்னும் நிரை முதனிலை மாற்றம் செய்வதும், I-ல் ρ என்னும் முதனிலைமாற்றம் செய்து கிடைத்த $E\rho$ என்ற முதனிலை அணியை முன்காரணியாக A-ன் பெருக்குவதும் சமம் என்றும்; Aயில் σ என்றும் நிரல் முதனிலை மாற்றம் செய்வதும், I-ல் σ என்னும் முதனிலை மாற்றம் செய்து கிடைத்த $E\sigma$ என்ற முதனிலை அணியைப் பின் காரணியாக A-யுடன் பெருக்குவதும் சமம் என்றும், நாம் §34·2-ல் அறியலானோம். இக் கோட்பாடு பயன்படுத்தப்படின் P காண்பது எளிதாகும்.

$I^T = I$ என்பதாலும், $I\,A = A\,I$ என்பதாலும் கொடுத்துள்ள மெய் சமச்சீர் அணியை

$A = I^T\,A\,I$ என எழுதலாம்.

இடப்புறத்து A-ல், 2-ஆவது, 3-ஆவது, ... நிரைகளின் முதல் மூலங்கள் சுழியாகுமாறு ρ என்ற நிரை முதனிலை மாற்றங்களையும், அதைத் தொடர்ந்து 2-ஆவது, 3-ஆவது, நிரல்களின் முதல் மூலங்கள் சுழியாகுமாறு σ என்ற நிரல் முதனிலை மாற்றங்களையும் செயல்படுத்துக. அதற்கேற்றுற்போல, வலப்புறத்து முன்காரணி I^T-யில் ρ என்ற நிரை முதனிமாற்றங்களையும், பின் காரணி I-ல் σ என்ற நிரல் முதனிலை மாற்றங்களையும் செயல் படுத்துக.

இடப்புறத்து அணி A யானது $D = \text{diag}\,(d_1\, d_2, \ldots\, dr, 0, 0, \ldots\, 0)$ என்ற சமமூலைவரை அணியாகும் வரை மேற்கூறிய ρ, σ முதனிலை மாற்றங்களைத் தொடர்ந்து செயல்படுத்துக.

அப்பொது, $A = I^T AI$ என்ற சமன்பாடானது, $D = P^T AP$ என்ற சமன்பாடாக மாறும். இதிலிருந்து நமக்கு வேண்டிய அணி P ஐப் பெறலாம். PA-ம் உடன் கிடைக்கிறது.

மாதிரிக்கணக்கு :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$ என்னும் மெய் சமச்சீர் அணியை

சமமூலைவரை அணியாக மாற்றியமைக்கும் பூச்சியமில் கோவை அணி P ஐக் காண்க.

$A = I^T\,A\,I$

அதாவது,
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(R_1 \to R_1 + R_2,\ C_1 \to C_1 + C_2)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 5 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(R_2 \to R_2 - \frac{1}{2} R_1,\ C_2 \to C_2 - \frac{1}{2} C_1)$

$$\begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{25}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(R_3 \to R_3 - \frac{5}{2}R_1,\ C_3 \to C_3 - \frac{5}{2}C_1)$

அதாவது, $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

$$A\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -3 \\ 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(R_3 \to R_3 + R_2,\ C_3 \to C_3 + C_2)$

$\therefore \quad D = P^T A P$

இங்கு, $D = \text{diag}\,(2, -\frac{1}{2}, -12)$

$P = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -3 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -2 \\ -3 & -2 & \end{bmatrix}$, $P^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

[குறிப்பு (1): மெய் சமச்சீர் அணி A-யைச் சம மூலைவரை அணியாக மாற்றியமைப்பதற்கு ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட P போன்ற அணிகளும், அவற்றைப் பொறுத்து ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட D போன்ற சம மூலைவரை அணிகளும் உண்டென அறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, மேற்கண்ட கணக்கில்,

$R_1 \to \frac{1}{\sqrt{2}} R_1, C_1 \to \frac{1}{\sqrt{2}} C_1; R_2 \to \sqrt{2} R_2, C_2 \to \sqrt{2} C_2$

$R_3 \to \frac{1}{2\sqrt{3}} R_3, \to C_3 \to \frac{1}{2\sqrt{3}} C_3$ ஆகிய ஒருங்கிசைவு மாற்றங்களைத் தொடர்ந்து செயல்படுத்தினால்

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

அதாவது, $\text{diag}(1, -1, -1) = Q^T A Q$ என்றாகிறது.

இங்கு, $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

குறிப்பு (2): A ஐச் சமமூலை வரை அணியாக மாற்றியமைப்பதற்கு P, Q என்னும் இரண்டு அணிகள் உண்டென்கிலும் அவற்றால் கிடைக்கப் பெற்ற $\text{diag}\ (2, -\frac{1}{2}, 12)$

diag $(1, -1, -1)$ ஆகிய சமமூலைவரை அணிகளில் உள்ள நேர்க் குறியுடைய மற்றும் எதிர்க்குறியுடைய மூலகங்களின் எண்ணிக்கைகள் மாறுதிருக்கின்றன என்பது நன்கு கருதத்தக்கது.

குறிப்பு (3) : diag $(1, -1, -1)$ என்பதை $R_2 \to i \times R_2$, $C_1 \to i \times C_2$; மற்றும் $R \to i \times R_3$, $C_3 \to i \times C_3$ என்ற கலப்பு ஒருங்கிசைவு மாற்றங்களால், ding $(1, 1, 1) = I_3$ ஆக மாற்றியமைக்கலாம் என அறிக; மெய் ஒருங்கிசைவு மாற்றங்களால் இயலாது என்றும் அறிக.

§ **74·2.** ஒரு மெய் சமச்சீர் அணியின் குறியெண்ணும், சிக்னேச்சரும் (Index and Sigpature of a real symmetric matrix)

(n, n) தரமுள்ள மெய் சமச்சீர் அணி A-ன் அளவை r எனில்,

$$A \text{ C diag } (d_1, d_2, \ldots d_r, 0, 0, \ldots 0)$$

$(\propto_k \neq 0,\ k = 1, 2, 3, \ldots r)$ எனக் கண்டோம்.

d_k-களில் சில நேர்க்குறியுடனும், சில எதிர்க் குறியுடனும் அமையலாம்.

$R_i \rightleftarrows R_j$, $C_i \rightleftarrows C_j$ என்ற ஒருங்கிசைவு மாற்றங்களைச் செயல்படுத்தித் தலையாய மூலைவிட்டத்தில் முதலில் நேர்க்குறியுடைய மூலகங்கள் தொடர்ச்சியாகவும் பின்னர் எதிர்குறியுடைய மூலங்கள் தொடர்ச்சியாகவும் அமையுமாறு மாற்றியமைக்கலாம்.

நேர்க்குறியுடைய தலையாய மூலைவிட்ட மூலங்களின் எண்ணிக்கை $= p$, எனில் எதிர்க்குறியுடைய மூலகங்களின் எண்ணிக்கை $= r - p$.

p-க்கு A-ன் குறியெண் (Index) என்றும் $\{p - (r - p)\}$-க்கு A-ன் சிக்னேச்சர் (Signature) என்றும் பெயர்.

§ **74·3.** குறிப்பு

A என்னும் (n, n) மெய் சமச்சீர் அணியும் $D = \text{diag } d_1, d_2, \ldots d_r, 0, 0, 0)$. $(d_k \neq 0,\ k = 1, 2, \ldots n)$ எனும் சமமூலைவரை அணியும் ஒருங்கிசைவு என்றும் கொள்வோம். A-ன் குறியெண் p என்க.

$$R_i \to \frac{1}{\sqrt{d_i}} R_j,\ C_i \to \frac{1}{\sqrt{d_i}} C_i\ (i = 1, 2, \ldots r)$$

என்ற ஒருங்கிசைவு மாற்றங்களைச் செயல் படுத்தி

$$\text{diag } (1, 1, 1, \ldots 1, -1, -1, \ldots -1, 0, 0, \ldots 0)$$

என்ற சமமூலைவரை அணியைப் பெறலாம். இங்கு p-எண்ணிக்கையுள்ள 1 என்னும் மூலங்களும், $(r-p)$ எண்ணிக்கையுள்ள -1 என்னும் மூலங்களும் மேற்கண்ட சமமூலைவரை அணியின் தலையாய மூலைவிட்டத்தில் இடம் பெறுகின்றன.

$$\text{எனவே, } A \text{ C} \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \text{diag}(1, 1, \ldots 1, -1, -1, \ldots -1, 0, \ldots 0)$$

என்றும் விளக்கமாக எழுதலாம்.**

(இங்கு, I_p என்பது (p, p) அலகு அணி, I_{r-p} என்பது $(r-p, r-p)$ அலகு அணி என்றறிக.)

மேற்கண்ட வடிவத்தில் அமையும் சமமூலைவரை அணியை A-ன் கனுனிகல் (canonical) வடிவம் என்று கூறுவர்.

எனவே, இரு மெய் சமச்சீர் அணிகள் ஒருங்கிசைவு ஆவதற்குத் தேவையானதும் போதுமானதுமான நிபந்தனைகள்: அவைகளின் அளவைகள் சமமாயிருத்தல் வேண்டும்; மேலும் அவைகளின் குறியெண்கள் (அல்லது சிக்னேச்சர்கள்) சமமாயிருத்தல் வேண்டும்).

§ 75. செங்குத்து ஒப்புமை அணிகள் (Orthogonally similar matrices)

வரைவிலக்கணம் :

A, B என்ற இரண்டு (n, n) அணிகள் $B=P^{-1}AP$ என்ற சமன்பாட்டுத் தொடர்பு பெறுமாறு P என்னும் ஒரு பூச்சியமில் கோவை செங்குத்து அணி காணப்பெறின், B-ஐ A-ன் செங்குத்து ஒப்புமை அணி என வழங்குவர். இதனை $B \text{ O } A$ என்று குறிப்பது வழக்கம்.

$B \text{ O } A$ எனில், $A \text{ O } B$ என்றும் $A \text{ O } B$, $B \text{ O } C$ எனில் $A \text{ O } C$ என்றும் எளிதில் அறியலாம்.

** மெய் ஒருங்கிசைவு செய்கைகளால் A ஐ $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ என்ற வடிவத்தில் பொதுவாக மாற்றியமைக்க இயலாது என எளிதில் அறியலாம். { § 74·1 குறிப்பு (3) }

P செங்குத்து அணி யென்பதால் $PP^T = I$ அதாவது, $P^{-1} = P^T$

எனவே, $B \bigcirc A$ என்றால்

$$B = P^{-1}AP = P^T AP$$

இதிலிருந்து இரு செங்குத்து ஒப்புமை அணிகள் ஒருங்கிசைவு என அறிகிறோம்.

§76. தேற்றங்கள்

(அ) (n, n) தரமுள்ள மெய் சமச்சீர் அணி A-ன் k தனித் தன்மை மூலங்கள் ஒன்றுபடுமானால் (coincident), அந்த தனித் தன்மை மூலத்திலிருந்து சரியாக k ஒருபடித் தொடர்பிலா தனித் தன்மை வெக்டர்கள் கிடைக்கும்.*

(ஆ) (n, n) தரமுள்ள ஒரு மெய் சமச்சீர் அணி n ஒருபடித் தொடர்பில் தனித்தன்மை வெக்டர்களைப் பெற்றிருக்கும்.

[இது (அ)-லிருந்து அறியப்படுகிறது].

(இ) (n, n) தரமுள்ள ஒரு மெய்சமச்சீர் அணி n அலகுச் செங்குத்துத் தனித்தன்மை வெக்டர்களைப் (orthonormal eigen vectors) பெற்றிருக்கும்.

(n ஒருபடித் தொடர்பிலா வெக்டர்களை, கிராம்-சிமிடு (Gram-Schmid) முறையில் n அலகுச் செங்குத்து வெக்டர்களாக மாற்றி அமைக்கலாம் என்பதால் [(ஆ)-வினை இணைத்து] இத் தேற்றத்தின் நிறுவல் அறியலாம்.)

§77. அலகுச் செங்குத்துத் தனித்தன்மை வெக்டர்களைப் பெற்றுள்ள ஒரு (n, n) அணி A-ன் தனித்தன்மை மூலங்கள் $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ (இவற்றில் சில மீண்டும் வரும் மூலங்களாகவும்** இருக்கலாம், ஆனால் எதுவும் சுழியல்ல) என்றால், $A \bigcirc \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$

நிறுவல்: $X_1, X_2, \dots X_n$ என்பவை A-ன் அலகுச் செங்குத்துத் தனித்தன்மை வெக்டர்களைக் குறிப்பதாகக் கொள்வோம்.

---

* இதன் நிறுவலை வேண்டுவோர், C.R. Wylie Jr., Advanced Engineering Mathematics, Mc Graw Hill, 1966, பக்கம் 484-ல் உள்ள Theorem 10 ஐப் பார்க்கவும்.

** Some may be repeated roots.

A-ன் தனித்தன்மை மூலங்களில் ஒன்றும் சுழிமதிப்புடைய தல்ல என்பதால் அதன் அளவை n என்பது தெளிவு. எனவே, $X_1, \dots X_n$ ஆகியவை n பரிமாண வெளியில் அமைந்துள்ள n அலகுச் செங்குத்து வெக்டர்களாகும்.

§ 63·3-ல் உள்ள தேற்றத்தின்படி, இவை ஒருபடித் தொடர்பிலாதவை.

$X_1, X_2, \dots X_n$ ஆகியவை நிரல்களாக அமையப் பெற்ற செங்குத்து அணியை P எனக் குறிப்போம். அதாவது, $P = [X_1, X_2, \dots X_n]$

எனவே, $P^{-1}AP = \text{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$ (§ 61)

ஆனால் P ஒரு செங்குத்து அணியாகும்.

$\therefore \quad PP^T = I$ அல்லது $P^T = P^{-1}$

எனவே, $P^TAP = \text{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$

அதாவது, $P^{-1}AP = P^TAP = \text{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$

$\therefore \quad A \text{ O diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$

§ 77·1. கிளைத்தேற்றம்

ஒரு மெய்சமச்சீர் அணி A-ன் தனித்தன்மை மூலங்கள் $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ (சில மீண்டும் வரும் மூலங்களாக இருக்கலாம்) எனில், $A \text{ O diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$

ஒரு மெய்சமச்சீர் அணியின் அனைத்து தனித்தன்மை வெக்டர்களும் அலகு செங்குத்து வெக்டர்கள் என § 76 (இ)-ல் அறியலானோம்.

$\therefore \quad A \text{ O diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$

§ 77·2. மறுதலைத் தேற்றம்

§ 77·1-ன் மறுதலையும் உண்மையே. அதாவது, ஒரு சதுர அணி ஒரு சமமூலைவரை அணிக்குச் செங்குத்து ஒப்புமையாக இருக்க வேண்டுமானால் அவ்வணி மெய் சமச்சீர் அணியாக இருக்கவேண்டும்.

நிறுவல் :

$$A \text{ O } D \text{ diag}\,(d_1, d_2, \dots d_n)$$

எனில், $D = P^{-1}AP = P^TAP$

$$\therefore \quad A = (P^T)^{-1} DP^{-1}$$
$$= (P^{-1})^{-1} DP^{-1}$$
$$= PD P^T$$

எனவே, $A^T = (PDP^T)$
$$= (P^T)^T D^T P^T$$
$$= PDP^T \; (\because \; D^T = D)$$
$$= A$$

அதாவது, A ஒரு மெய்சமச்சீர் அணி.

§77·3. குறிப்பு :

தேற்றம் §77-ல், கொடுத்துள்ள மெய்சமச்சீர் அணி A ஐ சமமூலைவரை அணியாக மாற்றும் P என்ற செங்குத்து அணியைக் காணும் முறையும் அடங்கியுள்ளது.

அது வருமாறு :

முதலில் A-ன் தனித்தன்மை மூலங்களான $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ ஆகியவற்றை கணக்கிடுக.

பின்னர் அவற்றிலிருந்து பெறப்படும் n ஒருபடித் தொடர்பிலா வெக்டர்களைக் காண்க. இவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகவும் இருக்கும். இவை அலகு வெக்டர்களாக இல்லையெனில், அலகு வெக்டர்களாக மாற்றியமைத்து $X_1, X_2, \ldots X_n$ என்று குறிக்கவும்.

$P = [X_1, X_2, \ldots X_n]$ என்ற அணிதான் நமக்குத் தேவையான செங்குத்து அணியாகும்.

$P^TP = I$ எனச் சரிபார்க்கலாம்).

மேலும், $P^TAP = \text{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)$

மாதிரிக்கணக்கு :

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$ என்ற மெய் சமச்சீர்

அணியைச் செங்குத்து ஒப்புமை மாற்றத்தால் (orthogonal similarity transformation) சமமூலைவரை அணியாக மாற்றும் ஓர் அணியைக் காண்க. மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமமூலைவரை அணி யாது ?

A-ன் தனித்தன்மைச் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 10-\lambda & -2 \\ 1 & -2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

அதாவது, $\lambda^3 - 24\lambda^2 + 180\lambda - 432 = 0$

$\therefore$ தனித்தன்மை மூலங்கள் $\lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = 6,\ \lambda_3 = 12$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 6$ என்னும் தனித்தன்மை மூலத்திலிருந்து கிடைக்கப் பெறும் செங்குத்தாக அமைந்துள்ள இரண்டு ஒருபடித் தொடர்பிலா வெக்டர்கள்

$$X_1 = [1, 0, -1]^T,\ X_2, = [1, 1, 1]^T$$

எனக் கணக்கீடு செய்யலாம்.

$\lambda_3 = 12$ என்னும் தனித்தன்மை மூலத்திலிருந்து $X_3 = [1, -2, 1]^T$ என்ற தனித்தன்மை வெக்டர் பெறப்படும்.

X_1, X_2, X_3 என்ற தனித்தன்மை வெக்டர்கள் ஒருபடித் தொடர்பிலாதவை என்று சரிபார்க்கலாம்.

மேலும், $X_1 \cdot X_2 = X_1 \cdot X_3 = X_2 \cdot X_3 = 0$ என்றும் எளிதில் அறியலாம்.

அதாவது, X_1, X_2, X_3 என்பவை செங்குத்து வெக்டர்கள்.

இந்த வெக்டர்களை அலகு வெக்டர்களாக மாற்றியமைத்து X_1', X_2', X_3' என்று குறித்தால்,

$$X_1' = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^T,$$

$$X_2' = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]^T,$$

$$X_3' = \left[\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right]^T$$

எனவே,

$$P = [X_1', X_2', X_3'] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

என்ற செங்குத்து அணி, A ஐ $D = \text{diag}\ (6, 6, 12)$ ஆக மாற்றியமைக்கிறது.

$P^{-1} = P^T$ என எளிதில் சரிபார்க்கலாம்.

$$\therefore \quad P^T AP = P^{-1}AP = D = \text{diag}\,(6, 6, 12)$$

§ **77·4.** ஒரு மெய்ச் சமச்சீர் அணியின் தனித்தன்மை மூலங்கள் வேறுபட்டவை (distinct) எனில், அவற்றிலிருந்து ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட செங்குத்து ஒருபடித் தொடர்பிலாத் தனித் தன்மை வெக்டர்களின் தொகுதி கிடைக்காது. ஆனால், தனித் தன்மை மூலங்களில் சில ஒன்றுபடும்பொழுது (coincident) ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட செங்குத்து ஒருபடித் தொடர்பிலாத் தனித் தன்மை வெக்டர் தொகுதி கிடைக்கப் பெறலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, மாதிரிக் கணக்கில் $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 6$ என்னும் மீண்டும் வரும் தனித்தன்மை மூலத்திலிருந்து

$$X_1' = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \quad \frac{-1}{\sqrt{2}}\right]^T, X_2' = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$$

என்னும் அலகுச் செங்குத்து ஒருபடித் தொடர்பிலாத் தனித் தன்மை வெக்டர்கள் கிடைத்ததல்லவா ?

இப்பொழுது அதே தனித்தன்மை மூலத்திலிருந்து $[2, 1, 0]^T$, $[-1, 0, 1]^T$ என்னும் இரண்டு ஒருபடித் தொடர்பிலாத் தனித் தன்மை வெக்டர்களையும் பெறலாம். கிராம்-சிமிடு முறையைப் பயன்படுத்தி இவற்றிலிருந்து

$$Y_1 = [2, 1, 0]^T, \ Y_2 = \left[-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1\right]^T$$

என்னும் செங்குத்து வெக்டர்களையும் அல்லது

$$Y_1' = \left[\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \ 0\right]^T, \ Y_2' \left[-\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}\right]^T$$

என்னும் அலகுச் செங்குத்து ஒருபடித் தொடர்பிலாத் தனித் தன்மை வெக்டர்களையும் பெறலாம்.

எனவே, $P'=[Y_2', Y_2', X_3']$ என்னும் வேறுபட்ட செங்குத்து அணியும் A ஐ

$$(P')^T AP' = D = \text{diag } (6, 6, 12)$$

என்னும் சமமூலைவரை அணியாக மாற்றியமைக்கும் என்று அறியலாம்.

§ **77·5** இதே சமச்சீர் அணி A ஐ

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{11} \\ 0 & 1 & \frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ என்ற அணியைக் கொண்டு

$Q^T AQ$ என்ற ஒருங்கிசைவு மாற்றத்தால்

$$D' = \text{diag}\left(7, \frac{66}{7}, \frac{72}{11}\right)$$

என்னும் சமமூலைவரை அணியாக மாற்றியமைக்க இயலும் எனக் கணக்கிட்டு அறியலாம்.

ஆனால், $$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq Q^T$$

என்பது குறிப்பிடத் தக்கது.

பின்னர், $$R = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{66}} & -\frac{\sqrt{11}}{11\sqrt{72}} \\ 0 & \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{66}} & \frac{2\sqrt{11}}{11\sqrt{72}} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{72}} \end{bmatrix}$$

என்ற அணியால், $R^T AR = \text{diag}(1, 1, 1)$ என்ற வடிவம் பெறலாம் என அறிக.

மேலும்,

$$S = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)\sqrt{6} & \left(\frac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{66}}\right)\sqrt{6} & \left(\frac{-\sqrt{11}}{11\sqrt{72}}\right)\sqrt{12} \\ 0 & \left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{66}}\right)\sqrt{6} & \left(\frac{2\sqrt{11}}{11\sqrt{72}}\right)\sqrt{12} \\ 0 & 0 & \left(\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{72}}\right)\sqrt{12} \end{bmatrix}.$$

எனில், $S^T AS = \text{diag}(6, 6, 12)$ என மாற்றியமைக்கலாம்.

§ 77·6. §77.5–லிருந்து அறியப்படுவது :

ஒருங்கிசைவு மாற்றங்களால் D'-லிருந்து Dஐயும், அவ்வாறே D-லிருந்து D' ஐயும் பெறலாம்.

மாருக, செங்குத்து ஒப்புமை மாற்றத்தால் D-லிருந்து $\text{diag}(1, 1, 1)$ மற்றும் D' ஆகியவற்றைப் பெற இயலாது என அறிய வேண்டும்.

எனவே, கொடுத்துள்ள ஒரு மெய்ச் சமச்சீர் அணியை (1) ஒருங்கிசைவு மாற்றங்களால் (2) செங்குத்து ஒப்புமை மாற்றத்தால் இரண்டு வேறுபட்ட சமமூலைவரை அணிகளாக மாற்றியமைக்கலாம்.

இவற்றில், ஒருங்கிசைவு மாற்றத்திற்குட்பட்ட ஒரு வெக்டர் வடிவமாற்றம் பெறும்பொழுது அதன் நீளம் (length) மாறலாம் அல்லது மாருமலும் இருக்கலாம். ஆனல், செங்குத்து ஒப்புமை மாற்றத்திற்குட்படும் பொழுது அவ் வெக்டரின் நீளம் மாறுவதில்லை.

இக் கோட்பாடு, இருபடிக் கோவை அமைப்பு பற்றிய தேற்றங்களைக் கற்றுணர்ந்த பின்னர் நன்கு தெளிவு பெறும்.

மற்ருென்றும் இங்குக் கருதத்தக்கது. மேற்கூறிய இருவகை மாற்றங்களால் பெறப்படும் சமமூலை வரைகளில், குறியெண்கள் மாறுவதில்லை, மற்றும் சிக்னேச்சர்கள் மாறுவதில்லை.

§ 78 சமான ஒப்புமை, ஒருங்கிசைவு மற்றும் செங்குத்து ஒப்புமை மாற்றங்களுக்கு இடையே அமைந்துள்ள தொடர்புகள்

பின்வருவனவற்றில் A ஒரு (n, n) சதுர அணி (மெய் மூலங்களைக் கொண்டவை) என்று கொள்வோம்.

(அ) P, Q என்பவை ஏதாவது பூச்சியமில் கோவை அணிகள் எனில்,

$$B = PAQ$$

என்பது சமான மாற்றம் (equivalance transformation) என்றும், B என்ற அணி, A–ன் சமான அணி என்றும் வழங்கப் பெறும்.

குறியீடு : $B \sim A$ அல்லது $A \sim B$. மேலும் பொருத்தமான P, Q அணிகளைக் கொண்டு

$$PAQ = [I_r \;\; O] \text{ அல்லது } \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix} \text{ அல்லது } \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

என மாற்றியமைக்கலாம். (§ 33·1)

(ஆ) P ஒரு பூச்சியமில் கோவை அணி எனில்,

$$B = P^{-1}AP$$

என்பதை ஒப்புமை மாற்றம் (similarity transformation) என்றும், Bஐ A-ன் ஒப்புமை அணி என்றும் கூறுவர்.

குறியீடு : $B \text{ S } A$ அல்லது $A \text{ S } B$

மேலும், A-ன் தனித்தன்மை வெக்டர்கள் ஒருபடித் தொடர் பிலாதவை ஆயின், பொருத்தமான P என்ற அணியைக் கொண்டு

$$A \text{ S } \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$$

அதாவது, $P^{-1}AP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$ என்ற சமமூலை வரை அணியாக மாற்றியமைக்கலாம்.

இங்கு $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ என்பவை A-ன் தனித்தன்மை மூலங்களைக் குறிக்கும். (§ 61)

(இ) P ஒரு பூச்சியமில் கோவை அணியாயின், $B = P^T AP$ என்பது ஒருங்கிசைவு மாற்றம் (congruent transformation) என்றும் B என்ற அணி A-ன் ஒருங்கிசைவு அணி என்றும் அறியப் படும்.

குறியீடு : $B \text{ C } A$ அல்லது $A \text{ C } B$.

மேலும், A ஒரு மெய்ச்சமச்சீர் அணி என்றும் அதன் அளவை r என்றும் எடுத்துக் கொண்டால், பொருத்தமான அணி P ஐக் கொண்டு,

$$A \text{ C } \mathrm{diag}\,(d_1, d_2, \ldots d_r, 0, 0, \ldots 0)$$

அதாவது, $P^T AP - \mathrm{diag}\,(d_1, d_2, \ldots d_r, 0, 0, \ldots 0)$ என்னும் சமமூலைவரை அணியாக மாற்றியமைக்கலாம்.

(ஈ) P என்ற பூச்சியமில் கோவை அணி செங்குத்து அணி யாயின், $P P^T = I$ அல்லது $P^{-1} = P^T$.

$$B = P^T AP = P^{-1} AP$$

என்பது செங்குத்து ஒப்புமை மாற்றம் (orthogonally similar transformation) என்றும், B என்ற அணி A-ன் செங்குத்து ஒப்புமை அணி என்றும் வழங்கப்பெறும்.

குறியீடு : $B \text{ O } A$ அல்லது $A \text{ O } B$.

மேலும், A ஒரு மெய்ச் சமச்சீர் அணியானல் பொருத்தமான அணி P ஐக் கொண்டு,

$$A \text{ O } \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \ldots \lambda_n)$$

அதாவது, $P^T AP = P^{-1} AP = \mathrm{daig}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \ldots \lambda_n)$ என்ற சம மூலைவரை அணியாக மாற்றியமைக்கலாம். இங்கு $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ என்பவை A-ன் தனித்தன்மை மூலங்கள்.

§ 79. தேற்றம்

(n, n) தரமுள்ள மெய்ச் சமச்சீர் அணி A-யின், தனித்தன்மை மூலங்களில் λ_1 என்னும் ஒரு மூலம் k முறை மீண்டும் வருமானல் (repeated k times)

$$[A - \lambda_1 I] \text{ -ன் அளவை } = n - k$$

நிறுவல்

A-ன் தனித்தன்மை மூலங்கள் $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k, \lambda_{k+1}, \ldots \lambda_n$ என்று கொள்வோம். மேலும் λ_1 என்ற மூலம் k முறை மீண்டும் வருமானல், $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k$ என எடுத்துக் கொள்ளலாம். மெய்ச் சமச்சீர் அணி A ஐச் சமமூலைவரை அணியாக மாற்றியமைக்கும் செங்குத்து ஒப்புமை அணி P எனில்,

$$P^{-1} AP = P^T AP = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)$$
$$= [D] \text{ என்க. } \quad [\S\ 77 \cdot 1]$$

$$\therefore \quad A = P\,[D]\,P^{-1}$$

ஆனல், $\quad f(A) = P\,[f(D)]\,P^{-1}$

என நிறுவலாம்.[1]

$$\therefore \quad [A - \lambda_1 I] = P\,[D - \lambda_1]\,P^{-1}$$

அதாவது $P^{-1}[A - \lambda_1 I]P = [D - \lambda_1]$

$$= \text{diag}\,(\lambda_1 - \lambda_1, \lambda_2 - \lambda_1, \ldots \lambda_k - \lambda_1, \lambda_{k+1} - \lambda_1, \ldots \lambda_n - \lambda_1)$$

$$= \text{diag}\,(0, 0, \ldots 0, \lambda_{k+1} - \lambda_1, \lambda_n - \lambda_1)$$

$\therefore A - \lambda_1 I$-ன் அளவை $= P^{-1}\,[A - \lambda_1 I]P$-ன்

அளவை $= \text{diag}\,(0, \ldots 0, \lambda_{k+1} - \lambda_1, \ldots \lambda_n - \lambda_1)$-ன்

அளவை $= n - k$ (§48·4 ஐ ஒப்பிடுக).

§ 80. மெய் இருபடிக் கோவை அமைப்புகள் (Real Quadratic forms)

$x_1, x_2, \ldots \ldots x_n$ என்னும் n மெய் மாறிகளாலான

$$\begin{aligned} Q(x) = a_{11}\,x_1^2 + 2a_{12}\,x_1\,x_2 + 2a_{13}\,x_1\,x_3 + \ldots + 2a_{1n}\,x_1 x_n \\ + a_{22}\,x_2^2 + 2a_{23}\,x_2\,x_3 + \ldots + 2a_{2n}\,x_2\,x_n \\ + a_{33}\,x_3^2 + \ldots \ldots + 2\,a_{3n}\,x_3\,x_n \\ + \ldots \ldots + a_{nn}\,x_n^2 \end{aligned}$$

என்னும் சமபடித்தான பல்லுறுப்பு இருபடிக் கோவையை இருபடிக் கோவை அமைப்பு (Quadratic forms) என்று கூறு கிறோம். இங்கு $a_{ij}\,(i, j = 1, 2, \ldots n)$ என்பவை மெய்மாறு எண்கள் (real constants).

மேற்கண்ட கோவையை

$$\begin{aligned} Q(x) = a_{11}\,x_1^2 + a_{12}\,x_1 x_2 + a_{13}\,x_1\,x_3 + \ldots a_{1n}\,x_1\,x_n \\ + a_{21}\,x_2 x_1 + a_{22}\,x_2^2 + a_{23}\,x_2 x_3 + \ldots + a_{2n}\,x_2 x_n \\ + \ldots \ldots \\ \ldots \ldots \ldots \\ + a_{n1}\,x_n\,x_1 + a_{n2}\,x_n x_2 + \ldots \ldots + a_{nn}\,x_n^2 \end{aligned}$$

என எழுதுவதில் பல பயன்கள் உண்டு. இங்கு $a_{ij} = a_{ji}$ என்பது கருதத்தக்கது.

[1] Whlie Jr., Advanced Engineering Mathemati cs, op.cit. pp.511, 512.

$A = [a_{ij}]$, $a_{ij} = a_{ji}$ என்பது ஒரு மெய்ச் சமச்சீர் அணியையும்

$X = [x_1, x_2, \ldots x_n]^T$ என்பது ஒரு நிரல் வெக்டரையும் குறித்தால், மேலே உள்ள இருபடிக் கோவை அமைப்பு

$Q(x) = X^T AX$ எனச் சுருக்கமாக எழுதப் பெறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு

$$Q(x) = x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 5x_1 x_2 + 6x_1 x_3 - 7x_2 x^3$$

$$= [x_1\ x_2\ x_3] \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} & 3 \\ \frac{5}{2} & -2 & -\frac{7}{2} \\ 3 & -\frac{7}{2} & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

இங்கு, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} & 3 \\ \frac{5}{2} & -2 & -\frac{7}{2} \\ 3 & -\frac{7}{2} & -3 \end{bmatrix}$

வெவ்வேறு மெய்ச் சமச்சீர் அணிகளிலிருந்து வெவ்வேறு இருபடிக் கோவை அமைப்புகள் பெறப்படும் என அறியலாகிறது.

$Q(x) = X^T AX$ எனில், A ஐ Q-ன் இருபடிக்கோவை அமைப்பு அணி (Matrix of the quadratic form) என்பர். $|A| \neq 0$ எனில் Q பூச்சியமில் அணிகோவை கொண்ட (non-singular) இருபடிக்கோவை அமைப்பு என்றும், $|A| = 0$ எனில் அது பூச்சிய அணிக்கோவை கொண்ட (singular) இருபடிக் கோவை என்றும் பெயர்பெறும்.

A-ன் அளவையை $Q(x)$-ன் அளவை எனக் கூறுவர்.

§ 81. தேற்றம்

$X = BY$, $|B| \neq 0$ என்னும் பூச்சியமில் அணிக்கோவை கொண்ட ஒருபடி நிலை மாற்றத்தால் $X^T AX$ என்ற இருபடிக் கோவை அமைப்பானது அதே அளவையுடன்கூடிய மற்றோர் இருபடிக் கோவையாக மாறும்.

நிறுவல் : கொடுத்துள்ள இருபடிக் கோவை அமைப்பில் $X = BY$ எனப் பிரதியிடில்,

$$X^T AX = (BY)^T A (BY) = Y^T B^T ABY$$
$$= Y^T RY$$

இங்கு, $R = B^T AB$. அதாவது, $R \text{ C } A$. எனவே, R-ன் அளவையும் A-ன் அளவையும் சமம். மேலும், R ஒரு சமச்சீர் அணி. ஆதலால், $Y^T RY$ என்று மாற்றியமைக்கப்பட்ட இருபடிக் கோவையின் அளவையும் கொடுத்துள்ள இருபடிக் கோவையின் அளவையும் சமம்.

§ 82. தேற்றம்

$A = [a_{ij}]$, $a_{ij} = a_{ji}$ என்னும் $(n, -n)$ மெய்ச் சமச்சீர் அணியின் அளவை r என்று கொள்வோம். $X = [x_1, x_2, \dots x_n]^T$ எனில், $X = BY$, $|B| \neq 0$ என்ற பொருத்தமான (appropriate) பூச்சியமில் கோவை அணி கொண்ட ஒருபடி நிலை மாற்றத்தால் X^TAX என்ற இருபடிக்கோவையை,

$$d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \dots d_r y_r^2 \quad (d_k \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots r)$$

என்னும் நிறைவர்க்க மாறிகளின் ஒருபடிச் சேர்மானமாக (linear combination of perfect squares) மாற்றியமைக்கலாம்.

நிறுவல் : கொடுத்துள்ள A என்னும் அணியை ஒருங்கிசைவு மாற்றங்களால் சுழியல்லாத r மூலங்களைக் கொண்ட சமமூலைவரை அணியாக மாற்றியமைக்க இயலும் என்றும், அவ்வாறு மாற்றியமைக்கும் அணி B ஐக் காணும் முறையையும் § 74, § 74·1-ல் அறியலானோம். அதாவது, $B^T AB = D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots d_r, 0, \dots 0)$

எனவே, $X = BY$, $|B| \neq 0$

என்ற பொருத்தமான ஒருபடி நிலைமாற்றத்தால்

$$X^T AX = (BY)^T A (BY), \{ Y = [y_1, y_2, \dots y_n]^T \}$$
$$= Y^T B^T ABY$$
$$= Y^T DY$$
$$= d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \dots + d_r y_r^2$$

என மாற்றியமைக்கப்படுகிறது.

[குறிப்பு : D-ல் $R_i \to \frac{1}{\sqrt{d_i}} R_i$, $C_i \to \frac{1}{\sqrt{d_i}} C_i$
$(i = 1, 2, \ldots r)$ என்னும் ஒருங்கிசைவு மாற்றங்கள் செய்து A C diag $(1, 1, \ldots 1, -1, \ldots -1, \ldots 0, 0, \ldots 0)$ என மாற்றம் பெறலாம் என்று § 74·3-ல் பார்த்தோம். எனவே, $X = CY$ எனப் பொருத்தமான ஒருபடி நிலைமாற்றத்தால், $X^T AX$ ஐ

$$z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \ldots - z_r^2$$

என மாற்றியமைக்கலாம். இங்கு p என்பது A-ன் குறியெண். இதை $X^T AX$-ன் குறியெண் என்றும் கூறுவர். அவ்வாறே $\{p-(r-p)\}$ ஐ $X^T AX$-ன் சிக்னேச்சர் என்றும் கூறுவர்.

மாதிரிக் கணக்கு

$$Q(x) \equiv 7x_1^2 + 10x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$$

என்ற இருபடிக் கோவை அமைப்பை

$$d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + d_3 y_3^2$$

மற்றும் $z_1^2 \pm z_2^2 \pm z_3^2$ வடிவங்களில் மாற்றியமைக்கவும். அவ்வாறு மாற்றியமைக்க உதவும் ஒருபடி நிலைமாற்றங்கள் யாவை?

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$ எனில்,

$Q(x) = X^T AX$ என எழுதலாம்.

§ 77·5-ல் விளக்கியவாறு $Q = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{11} \\ 0 & 1 & \frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ என்ற

அணியானது Aஐ, $D = \text{diag}\left(7, \frac{66}{7}, \frac{72}{11}\right)$ ஆக மாற்றியமைக்கிறது. எனவே, $X = QY$ என்னும் ஒருபடி நிலைமாற்றம்,

அதாவது, $x_1 = y_1 + \frac{2}{7} y_2 - \frac{1}{11} y_3$

$$x_2 = \quad y_2 + \frac{2}{11} y_3$$

$$x_3 = \quad y_3$$

என்ற பூச்சியமில் கோவை அணிகொண்ட ஒருபடி நிலைமாற்றம் $X^T AX$ ஐ $Y^T DY$ என்ற

அதாவது, $7y_1^2 + \frac{66}{7} y_2^2 + \frac{72}{11} y_3^2$

என்ற நிறைவர்க்கங்களின் ஒருபடிச் சேர்மானமாக மாற்றியமைக் கிறது.

மேலும், $R = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{66}} & \frac{-11}{11\sqrt{72}} \\ 0 & \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{66}} & \frac{2\sqrt{11}}{11\sqrt{72}} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{72}} \end{bmatrix}$

என்ற அணியானது A ஐ $D' = \text{diag}(1, 1, 1)$ ஆக மாற்றி யமைக்கிறது.

எனவே, $X = RY$ அல்லது

$$x_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right) z_1 + \left(\frac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{66}}\right) z_2 - \left(\frac{11}{11\sqrt{72}}\right) z_3$$

$$x_2 = \left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{66}}\right) z_2 - \left(\frac{2\sqrt{11}}{11\sqrt{72}}\right) z_3$$

$$x_3 = \left(\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{72}}\right) z_3.$$

என்னும் ஒருபடி நிலைமாற்றம்

$X^T A X$ ஐ $Z^T D' Z$ என்னும்

அதாவது, $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ என்னும் வடிவத்தில் மாற்றி அமைக்கிறது.

§ 83. லாக்ரான்சி (Lagrange) முறையில் கொடுத்துள்ள ஓர் இருபடிக் கோவை அமைப்பை நிறை வர்க்கங்களின் ஒருபடிச் சேர்மானமாக மாற்றியமைத்தல்

விளக்கம் எளிதாவதற்கு $X = [x_1, x_2, x_3]$ என எடுத்துக் கொள்வோம்.

முதலில், x_1 அடங்கிய எல்லா உறுப்புகளையும், பின்னர் x_1 அல்லாத x_2 அடங்கிய உறுப்புகளையும் இறுதியில், x_1, x_2 அல்லாத மற்றைய உறுப்புகளையும் கொண்ட மூன்று தொகுதிகளாகப் பிரித்துக் கொள்ளவும்.

முதல் தொகுதி நிறை வர்க்கம் ஆகுமாறு, தேவைப்படும் கோவையைக் கூட்டிக் கொண்டு பின்னர்க் கழித்துவிடலாம். இந்தக் கழிக்கப்பட்ட தொகையை இரண்டாவது மூன்ருவது தொகுதிகளுடன் வேண்டியவாறு சேர்த்துக்கொள்ளவும்.

அடுத்து, இரண்டாவது தொகுதியையும் நிறைவர்க்கமாவதற்கான கோவையைக் கூட்டிக் கொண்டு அதை மூன்ருவது தொகுதியிலிருந்து கழித்துவிடலாம்.

இரண்டாவது தொகுதி நிறைவர்க்கமானதும் மூன்ருவது தொகுதியும் நிறைவர்க்கமாகிவிடும்.

இம் முறையில் அணியைப் பயன்படுத்தாமல், இயற்கணிதச் செய்கைகளைப் (algebraic operations) பயன்படுத்துகிறேம். இந்த முறையிலும் § 82-ல் கூறிய முறையிலும் கிடைக்கக்கூடிய விளைவுகள் ஒன்றுபடும் (the same) என்பதை முன் செய்த மாதிரிக் கணக்கை லாக்ரான்சி முறையிலும் செய்து அறியலாம்.

$$\begin{aligned}
Q(x) &= 7x_1^2 + 10x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 \\
&= \{7x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3\} \\
&\qquad + \{10x_2^2 - 4x_2x_3\} + 7x_3^2 \\
&= \{7x_1^2 - 2x_1(2x_2 - x_3)\} \\
&\qquad + \{10x_2^2 - 4x_2x_3\} + 7x_3^2 \\
&= 7\left\{x_1^2 - 2x_1\left(\frac{2x_2}{7} - \frac{1}{7}x_3\right)\right\} \\
&\qquad + \{10x_2^2 - 4x_2x_3\} + 7x_3^2 \\
&= 7\left\{x_1 - \left(\frac{2}{7}x_2 - \frac{1}{7}x_3\right)\right\}^2 \\
&\qquad - 7\left(\frac{2}{7}x_2 - \frac{1}{7}x_3\right)^2 \\
&\qquad + \{10x_2^2 - 4x_2x_3\} + 7x_3^2
\end{aligned}$$

$$= 7\left(x_1 - \frac{2}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_3\right)^2 + \left\{\frac{66}{7}x_2^{\,2} - \frac{24}{7}x_2 x_3\right\} + \frac{48}{7}x_3^{\,2}$$

$$= 7\left(x_1 - \frac{2}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_3\right)^2 + \frac{66}{7}\left(x_2^{\,2} - \frac{4}{11}x_2 x_3\right) + \frac{48}{7}x_3^{\,2}$$

$$= 7\left(x_1 - \frac{2}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_3\right)^2 + \frac{66}{7}\left(x_2 - \frac{2}{11}x_3\right)^2 - \frac{66}{7}\cdot\frac{4}{11}x_3^{\,2} + \frac{48}{7}x_3^{\,2}$$

$$= 7\left(x_1 - \frac{2}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_3\right)^2 + \frac{66}{7}\left(x_2 - \frac{2}{11}x_3\right) + \frac{72}{11}x_3^{\,2}$$

எனவே,
$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x_1 - \frac{2x_2}{7} + \frac{x_3}{7} \\ y_2 &= x_2 - \frac{2x_3}{11} \\ y_3 &= x_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

அல்லது,
$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y_1 + \frac{2y_2}{7} - \frac{y_3}{11} \\ x_2 &= y_2 + \frac{2y_3}{11} \\ x_3 &= y_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2)$$

என்ற ஒருபடி நிலைமாற்றத்தால் $Q(x)$ என்பது

$$7y_1^{\,2} + \frac{66}{7}y_2^{\,2} + \frac{72}{11}y_3^{\,2}$$

என மாறியமைந்துள்ளது என அறியலாம்.

$$\text{மேலும்,}\quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{7}} z_1 + \frac{2}{7}\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{66}} z_2 - \frac{1}{11}\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{72}} z_3$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{66}} z_2 + \frac{2}{11}\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{72}} z_3$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{72}} z_3$$

என்ற ஒருபடி நிலைமாற்றத்தால், $Q(x)$ என்பது

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$$

என மாற்றப்படும்.

[குறிப்பு : $Q = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{11} \\ 0 & 1 & \frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$

எனில், $X = QY$ எனச் சமன்பாடு (2) ஐயும்

$Y = Q^{-1}X$ எனச் சமன்பாடு (1) ஐயும் எழுதலாம்.

எனவே, X^TAX ஐ $7y_1^2 + \frac{66}{7}y_2^2 + \frac{72}{11}y_3^2$ ஆக மாற்றியமைக்கும் அணி Q என அறியப்படுகிறது.]

§ 84. தேற்றம்

$A = [a_{ij}]$, $a_{ij} = a_{ji}$ என்னும் (n, n) மெய்ச்சமச்சீர் அணியின் அளவை r என்றும், அதன் 'சுழியல்லாத' தனித்தன்மை மூலங்கள் $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r$ [இவற்றில் சில ஒன்றுபடலாம் (coincident)] என்றும் கொள்வோம். $X = [x_1, x_2, \ldots x_n]^T$ எனில், $X = PY$, $|P| \neq 0$ என்னும் பொருத்தமான 'செங்குத்து ஒருபடி நிலைமாற்றத்தால்' X^TAX என்ற இருபடிக் கோவை அமைப்பு

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_r y_r^2$$

என்னும் நிறைவர்க்க மாறிகளின் ஒருபடிச் சேர்மானமாக மாற்றியமைக்கப்படலாம்.

நிறுவல்

A என்பது மெய்ச் சமச்சீர் அணியாதலின், அது ஒரு சம மூலை வரை அணிக்குச் செங்குத்து ஒப்புமை ஆகும். அதாவது, P ஒரு பொருத்தமான செங்குத்து அணி எனில்,

$$P^{-1}AP = P^TAP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)$$

இங்கு, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ என்பவை A-ன் n தனித்தன்மை மூலங்களாகும் (§ 77-1). A-ன் அளவை r எனக் கொண்டிருப்பதால், அதன் r மூலங்கள் மட்டும் சுழியல்லாதவை. அவற்றை $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r$ எனப் பொதுவாக எடுத்துக்கொள்ளலாம்.

$$\therefore \quad P^{-1}AP = P^{T}AP = \text{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r, 0, 0, \ldots 0)$$
$$= D \text{ எனக் கொள்வோம்.}$$

$Y = [y_1, y_2, \cdots y_n]^T$ எனில்,

$X = PY, \ |P| \neq 0$ என்னும் பொருத்தமான செங்குத்து ஒருபடி நிலைமாற்றத்தால்,

$$X^TAX = (PY)^T A(PY)$$
$$= Y^TP^TAPY = Y^TDY$$
$$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_r y_r^2$$

§ 85. குறிப்புகள்

§ **85·1.** $X^T AX$ என்னும் கொடுத்துள்ள இருபடிக் கோவை அமைப்பினை

$$d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_py_p^2 - d_{p+1}y_{p+1}^2 - \cdots - d_ry_r^2 \quad \cdots (1)$$

அல்லது, $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_q y_q^2 - \lambda_{q+1} y_{q+1}^2 - \ldots - \lambda_s y_s^2 \quad \ldots \quad (2)$

$$\left\{\begin{array}{l} d_k, \lambda_k > 0, \ k = 1, 2, 3, \ldots n \\ d_i \neq \lambda_i \ (\text{பொதுவாக}), \ i = 1, 2, 3, \ldots n \end{array}\right\}$$

என்ற வடிவத்தில் மாற்றியமைப்பதற்கு இயல் வடிவ அமைப்புக்கு ஒடுக்கல் (Reduction to normal form) என்று பெயர். (1)-லும், (2)-லும் உள்ள இருபடிக் கோவைகளை இயல் வடிவ (normal) இருபடிக் கோவை அமைப்புகள் என்று வழங்கலாம்.

கொடுத்துள்ள இருபடிக் கோவை அமைப்பினை ஒருங்கிசைவு மாற்றங்களால் (அல்லது லாக்ரான்சி முறையில்) வடிவம் (1)-க்கு மாற்றப்படின், அது ஒருங்கிசைவு இயல்வடிவம் (congruent normal form) என்றும், செங்குத்து ஒப்புமை மாற்றத்தால் வடிவம் (2)-க்கு மாற்றப்படின், அது செங்குத்து இயல்வடிவம் (orthogonal normal form) என்றும் வழங்கப்படும்.

§ 85·2. கொடுத்துள்ள ஓர் இருபடிக்கோவை அமைப்பினை ஒருங்கிசைவு இயல்வடிவம் (1)-க்கும், செங்குத்து இயல் வடிவம் (2)-க்கும் மாற்றப்படின்,

(அ) $r = s$ என்றும், (ஆ) $p = q$ என்றும், அதனால்

(இ) $p - (r - p) = q - (s - q)$ என்றும் நிறுவலாம்.[1]

இதற்கு 'சில்வஸ்டரின் நிலைம விதி' (Sylvester's Law of Inertia) என்று பெயர்.

§ 85·3. ஒருங்கிசைவு, செங்குத்து மாற்றங்களுக்கு வரைபட விளக்கம்.

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 &= 36 \\ \text{அதாவது,} \quad X^T A X &= 36 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (A)$$

என்னும் அதிபரவளைவினை (Hyperbola) எடுத்துக் கொள்வோம்.

இங்கு, $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

இதன் மையம் (0, 0) என்றும், அச்சுகளின் நீளங்கள் $4\sqrt{3}$, 12 என்றும், அந்த அச்சுகள் x அச்சிலிருந்து முறையே 45°, 135° கோணங்களில் அமைந்துள்ளன என்றும் ஆயத் தொலைவடிவ கணிதக் கணக்கீடுகள் வழியாக அறியலாம்.

கணக்கீடு செய்து அணி A-ன் தனித்தன்மை மூலங்கள் $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$ என்றும், அவற்றால் பெறப்படும் தனித் தன்மை வெக்டர்கள் முறையே

$$X_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^T, \; X_2 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]^T$$ என்றும்

காணலாம்.

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$ எனில், $P^{-1} = P^T$

எனக் கணக்கிட்டு அறியலாம்.

[1] Shanthi Narayan, A Text Book of Matrices—pp. 158-159.

$$\therefore \quad P^{-1} AP = P^{T} AP = \text{diag}\,(3, -1)$$

எனவே, $Y = [y_1, y_2]^T$ எனக் கொள்ளின்,

$X = PY$ என்னும் செங்குத்து

ஒருபடி நிலைமாற்றத்தால்

$X^T AX = 36$ என்னும்

அதிபர வளைவின் சமன்பாடு

$$Y^T [\text{diag}\,(3, -1)]\, Y = 36$$

அதாவது, $3 y_1^2 - y_2^2 = 36$

அதாவது, $$\frac{y_1^2}{\left(2\sqrt{3}\right)} - \frac{y_2^2}{6^2} = 1 \qquad \ldots \text{(B)}$$

என மாற்றம் அடைகிறது.

(B)-ம் ஓர் அதிபர வளைவைத்தான் குறிக்கிறது என்றும், அதன் மையம் (0, 0) என்றும், அதன் அச்சுகளின் நீளங்கள் $4\sqrt{3}$, 12 (மாறவில்லை) என்றும் புலனாகிறது.

மேலும், $Y = P^{-1} X$ என்பது

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} x_2 = (\cos 45°)\, x_1 + (\sin 45°)\, x_2$$

$$y_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} x_2 = (\cos 135°)\, x_1 + (\sin 135°)\, x_2$$

என விரித்தெழுதப்படும்போது,

(B)-ன் அச்சுகள் (A)-ன் அச்சுகளிலிருந்து 45° கோணத்தில் அமைந்துள்ளன என அறிகிறோம்.

எனவே, செங்குத்து ஒருபடி நிலைமாற்றத்தால் அல்லது செங்குத்து இயல் வடிவ மாற்றத்தால், ஒரு வளைகோட்டின் இனமும் (type), வடிவமும் (shape), அளவும் (size) மாறுவதில்லை என்றும், வரைபட விளக்கத்தில் செங்குத்து ஒருபடி நிலைமாற்றம் என்பது கொடுத்துள்ள ஒரு வளைகோட்டின் தலையாய அச்சுகளின் (principal axes) மேல் பொருந்துமாறு x_1, x_2 அச்சுகளைச் சுழற்றுவதற்குச் (rotation of co-ordinate axes) சமம் என்றும் நன்கு அறிதல் வேண்டும். சமமூலை வரை அணிகளின் பயன்களில் இதுவும் ஒன்று.

இதற்கு மாருக, $X = BZ$ என்னும் ஒருங்கிசைவு ஒருபடி நிலைமாற்றம் (அல்லது ஒருங்கிசைவு) இயல் வடிவமாற்றம் செய்யும் பணியை ஆராய்வோம்.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \text{ எனில், } B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \neq B^T$$

A C B எனக் கணக்கிட்டு அறியலயாம்.

$X = BZ$ என்னும் மாற்றத்தால்,

$X^TAX = 36$ என்னும் அதிபரவளைவு

$$z_1^2 - z_2^2 = 36$$

அதாவது, $$\frac{z_1^2}{6^2} - \frac{z_2^2}{6^2} = 1 \qquad \dots \quad \text{(C)}$$

என்னும் (செங்குத்து) அதிபரவளைவாகமாறுகிறது. இதன் மையம் (0, 0) என்னும், அச்சுநீளங்கள் 6,6 (மாறிவிட்டன) என்றும் அறிகிறோம்.

இதிலிருந்து ஒருங்கிசைவு ஒருபடி நிலை (இயல் வடிவ) மாற்றத்தால் ஒரு வளைகோட்டின் இனம் (type) மாறுவதில்லை. ஆனுல், அதன் வடிவமும் அளவும் மாறலாம் என அறியப்படுகிறது.

§ 86. இருபடிக் கோவை அமைப்புகளின் மதிப்பு வகைகள் (Value class)

$Q(x) = X^TAX$ என்பது n மெய் மாறிகளைக் கொண்ட இருபடிக் கோவை அமைப்பு ஒன்றினைக் குறிப்பதாகக் கொள்வோம்.

இங்கு, $X = [x_1, x_2, \dots x_n]^T$

$A = [a_{ij}]$, $a_{ij} = a_{ijq}$ $i, j = 1, 2, 3, \dots n$

$x_k \neq 0$ $(k = 1, 2, \dots n)$ என்னும் x_k-களின் சுழியல்லாத எல்லா மெய் மதிப்புகளுக்கும் :

(அ) $Q > 0$ எனில், அதற்கு (Q-விற்கு) **வலிவுள்ள நேர்** (positive definites) **இருபடிக் கோவை அமைப்பு** என்று பெயர்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

(ஆ) $Q \geqslant 0$ எனில் அதற்குப் பகுதி வலிவுள்ள நேர் (positive semi-definite) இருபடிக் கோவை அமைப்பு என்று பெயர்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$(x_1 - x_2)^2$$

(இ) $Q < 0$ எனில், அதற்கு வலிவுள்ள எதிர் (negative difinite) இருபடிக் கோவை அமைப்பு என்று பெயர்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$-(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

(ஈ) $Q \leqslant 0$ எனில், அதற்குப் பகுதி வலிவற்ற எதிர் (negative semi-definite) இருபடிக் கோவை அமைப்பு என்று பெயர்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$-(x_1^2 - x_2^2)$$

(உ) x_k $(k = 1, 2 \ldots n)$-களின் மெய் மதிப்புகளுக்கு $Q > 0$ அல்லது $Q <$ எனில், அதற்கு வலிவற்ற (indefinite) இருபடிக் கோவை அமைப்பு என்று பெயர்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$x_1^2 - x_2^2$$

§ **87·1. தேற்றம்**

n மெய்மாறிகளைக் கொண்ட இருபடிக்கோவை அமைப்பு Q (n)-ன் அளவை r என்றும், அதன் சிக்னேச்சர் s என்றும் கொள்வோம்.

(அ) $s = r = n$ எனில், Q வலிவுள்ள நேர் அமைப்பு.

(ஆ) $s = r < n$ எனில், Q பகுதி வலிவுள்ள நேர் அமைப்பு.

(இ) $-s = r = n$ எனில், Q வலிவுள்ள எதிர் அமைப்பு.

(ஈ) $-s = r < n$ எனில், Q பகுதி வலிவுள்ள எதிர் அமைப்பு.

(உ) $|s| \neq r$ எனில், Q வலிவற்ற அமைப்பு என நிறுவலாம். இதனை மாணவர்கள் பயிற்சியாக எடுத்துக் கொள்வார்களாக. இதன் மறுதலையும் உண்மையே.

§87·2. தேற்றம்

ஒரு மெய் இருபடிக் கோவை அமைப்பு வலிவுள்ள நேர் அல்லது எதிர் அமைப்பாவதற்குத் தேவையானதும் போதுமானதுமான நிபந்தனைகள் :

$$A = [a_{ij}], \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad (i, j = 1, 2, \dots n]$$

$$X = [x_1, x_2, \dots x_n]^T$$

$$Q(x) = X^T AX$$

$$A_1 = | a_{11} |, \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots A_r = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1r} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}$$

$$\dots A_r = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

எனக்கொள்வோம்.

$Q(x)$ என்ற இருபடிக்கோவை அமைப்பு :

(அ) வலிவுள்ள நேர் அமைப்பு எனில்

$$A_r > 0 \ (r = 1, 2, 3, \dots n)$$

(ஆ) வலிவுள்ள நேர் அமைப்பு எனில்

$$(-1)^r A_r > 0 \ (r = 1, 2, 3, \dots n)$$

இதன் மறுதலையும் உண்மையே. இதன் நிறுவலை, W. L. Ferrar, Algebra, Oxford Book Co., N. Y. 1941, பக்கங்கள் 138–141-ல் காண்க.

§ 88. இரண்டு இருபடிக் கோவை அமைப்புகளை ஒரே நேரத்தில் இயல் வடிவ அமைப்புகளாக மாற்றியமைத்தல்.

தேற்றம் : வழக்கமான குறியீடுகளுடன் X^TAX, X^TBX என்னும் இரண்டு மெம் இருபடிக் கோவை அமைப்புகளில் X^TBX என்பது வலிவுள்ள நேர் அமைப்பு எனில், $X=CY$ என்ற பொருத்தமான ஒரு மெய் பூச்சியமில் கோவை ஒருபடி நிலைமாற்றத்தால் X^TAX ஐ X^TBX ஐ ஒரே நேரத்தில் முறையே

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

மற்றும் $y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2$

என்னும் இயல் வடிவ அமைப்புகளாக மாற்றியமைக்கலாம்.

இங்கு $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ என்பவை $|\lambda B - A| = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும்.

நிறுவல் : $X^T BX$ ஒரு வலிவுள்ள நேர் அமைப்பு என்பாதல் B-ன் தனித்தன்மை மூலங்கள் $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ அனைத்தும் நேர்க் குறியுடையன (§ 87·1). மேலும், B ஒரு மெய் சமச்சீரணியாதலால்,

$$B \text{ O diag}(\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n) \quad (\S\, 77{\cdot}1)$$

அதாவது, G பொருத்தமான ஒரு செங்குத்து அணி எனில்,

$$G^T BG = G^{-1} BG = \text{diag}(\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n)$$

$$H = \text{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_1}}, \frac{1}{\sqrt{\mu_2}}, \ldots \frac{1}{\sqrt{\mu_n}}\right)$$

என்றும் $Q = GH$ என்றும் கொள்ளின் (Q செங்குத்து அணியாக இருக்கத் தேவையில்லை.)

$$Q^T BQ = H^T G^T BGH = \text{diag}(1, 1, \ldots 1) = I \quad \ldots (1)$$

இப்போது, A ஒரு மெய்சமச்சீர் அணி என்பதால், $R = Q^T AQ$ என்பதும் ஒரு சமச்சீர் அணியேயாகும். எனவே, R-ன் தனித்தன்மை மூலங்கள் $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ என்றும் P என்பது பொருத்தமான ஒரு செங்குத்து அணி என்றும் கொள்ளின்,

$$P^T RP = PR^{-1} P = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)$$

அதாவது, $C = QP$ எனில்,

$$C^T AC = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n) \quad \ldots (2)$$

எனவே, $X = CY$ என்னும் மெய் பூச்சியமில் கோவை ஒருபடி நிலைமாற்றத்தால்,

$$X^T AX = Y^T (C^T AC) Y$$
$$= Y^T [\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)] Y \text{ [சமன்பாடு (2)]}$$
$$= [\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots \lambda_n y_n^2]$$

மேலும், $C^T BC = P^T (Q^T BQ) P$

$$= P^T IP \quad \text{[சமன்பாடு (1)]}$$
$$= P^{-1} IP \quad [P \text{ செங்குத்து அணி}]$$

$$\therefore \quad C^T BC = I = \text{diag}(1, 1, \ldots 1) \quad \ldots (3)$$

எனவே, $X = CY$ என்னும் அதே மெய் பூச்சியமில் கோவை ஒருபடி நிலைமாற்றத்தால்,

$$\begin{aligned} X^T BX &= Y^T(C^T BC)\,Y \\ &= Y^T I Y \qquad \text{[சமன்பாடு (3)]} \\ &= [y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2] \end{aligned}$$

இவ்வாறு $X = CY = (QP)\,Y = (GHP)\,Y$ என்ற மெய் பூச்சியமில்கோவை ஒருபடி நிலைமாற்றமானது $X^T AX$ மற்றும் $X^T BX$ என்னும் இரண்டு இருபடிக்கோவை அமைப்புகளையும் ஒரே நேரத்தில் முறையே

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

மற்றும் $y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2$ என்ற இயல்வடிவ அமைப்பு களாக மாற்றியமைக்கிறது.

இனி, C ஒரு பூச்சியமில்கோவை அணியாதலின்,

$$|C| = |C^T| \neq 0.$$

எனவே, λ என்ற எண்ணியின் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்

$$\begin{aligned} C^T[\lambda B - A]\,C &= \lambda\, C^T BC - C^T AC \\ &= \lambda\,[\mathrm{diag}\,(1, 1 \dots 1)] - \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) \\ &\qquad \{\text{சமன்பாடுகள் (2), (3)}\} \\ &= \mathrm{diag}\,(\lambda - \lambda_1, \lambda - \lambda_2, \dots \lambda - \lambda_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\quad |C^T[\lambda B - A]\,C| &= |C^T| \cdot |C| \cdot |\lambda B - A| \\ &= |\mathrm{diag}\,(\lambda - \lambda_1, \dots \lambda - \lambda_n)| \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda - \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda - \lambda_n \end{vmatrix} \end{aligned}$$

எனவே, $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ என்பவை $|\mathrm{diag}\,(\lambda - \lambda_1, \dots \lambda - \lambda_n)| = 0$

அல்லது $|C^T[\lambda B - A]\,C| = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும். ஆனால் $|C^T| \cdot |C| \neq 0$.

$\therefore$ $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ என்பவை $|\lambda B - A| = 0$ என்ற சமன் பாட்டின் மூலங்களாகும்.

மாதிரிக்கணக்கு :

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

எனில், X^TAX மற்றும் X^TBX ஆகிய இருபடிக் கோவை அமைப்புகளை ஒரே நேரத்தில் முறையே $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2$ மற்றும் $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ என்னும் இயல்வடிவ அமைப்புகளாக மாற்றியமைக்கப் பயன்படும் மெய் பூச்சியமில் கோவை ஒருபடி நிலைமாற்றத்தைக் காண்க.

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \text{ ஆகியவை } |\lambda B - A| = 0$$

என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் என நிறுவுக.

B-ன் தனித்தன்மை மூலங்கள் $\mu_1 = 6,\ \mu_2 = 6, \mu_3 = 12$ மேலும் அவற்றிலிருந்து பெறப்படும் தனித்தன்மை அலகு செங்குத்து வெக்டர்கள் முறையே

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{-1}{\sqrt{2}}\right]^T, \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]^T,$$
$$\left[\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right]$$

[§ 77·3-ல் உள்ள மாதிரிக்கணக்கு]

$$\therefore\ G=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix},\ H=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$GH = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{6\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{-1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{6\sqrt{2}} \end{bmatrix} = Q \text{ (என்க.)}$$

$$R = Q^T A Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

எனவே, R-ன் தனித்தனித்தன்மை மூலங்கள்

$$\lambda_1 = \frac{1}{3}, \ \lambda_2 = \frac{1}{2}, \ \lambda_3 = \frac{1}{2}$$

அவற்றிலிருந்து பெறப்படும் தனித்தன்மை அலகு செங்குத்து வெக்டர்கள் முறையே

$$[1, 0, 0]^T, \quad [0, 1, 0]^T, \quad [0, 0, 1]^T$$

$\therefore \quad P = I.$ மேலும் $P^T = P^{-1} = I$

எனவே, வேண்டிய மெய்பூச்சியமில் கோவை ஒருபடி நிலை மாற்றம் :

$$X = CY = (GHP)\,Y = (GH)\,Y$$

அதாவது, $$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{6\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{6\sqrt{2}} \end{bmatrix} Y$$

மேலும், $|\lambda B - A| = \begin{vmatrix} 7\lambda-3 & -2\lambda+1 & \lambda-1 \\ -2\lambda+1 & 10\lambda-5 & -2\lambda+1 \\ \lambda-1 & -2\lambda+1 & 7\lambda-3 \end{vmatrix}$

$$= 36\,(12\lambda^3 - 16\lambda^2 + 7\lambda - 1)$$

$$= 36\,(3\lambda-1)\,(2\lambda-1)^2$$

எனவே, $\lambda_1 = \frac{1}{3}$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, $\lambda_3 = \frac{1}{2}$ என்பவை $|\lambda B - A| = 0$-ன் மூலங்களாகும்.

$X = CY$ என்ற ஒருபடி நிலைமாற்றத்தால் $X^T AX$ மற்றும் $X^T BX$ என்பவை முறையே

$$\frac{1}{3}\,y_1{}^2 + \frac{1}{2}\,y_2{}^2 + \frac{1}{2}\,y_3{}^2 \text{ மற்றும் } y_1{}^2 + y_2{}^2 + y_3{}^2$$

என்னும் இயல் வடிவங்களைப் பெறுகின்றன.

§ 89. கெர்மிசியன் அணிகள் (Hermitian Matrices)

● **வரைவிலக்கணம் :**

கலப்பு எண்களாலான மூலங்களைக் கொண்ட சதுர அணி A ஆனது $A = \bar{A}^T$ என்னும் சமன்பாட்டுக்குப் பொருந்துமாறு இருப்பின், அது கெர்மிசியன் அணி அல்லது சுருக்கமாக கெர்மிசியன் (Hermitian) என்று வழங்கப்படும்.

மாறாக, $A = -\bar{A}^T$ என்ற சமன்பாட்டுக்குட்படும்போது அது எதிர்ச் சீர்க் கெர்மிசியன் (Skew Hermitian) என்ற பெயர் பெறும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2-3i & 3+4i \\ 2+3i & 0 & 4-5i \\ 3+4i & 4+5i & 2 \end{bmatrix}$$

என்பது ஒரு கெர்மிசியன்.

$$B = \begin{bmatrix} 3i & 3+4i & 4-5i \\ -3+4i & -4i & 5+6i \\ -4+5i & -5+6i & 0 \end{bmatrix}$$

என்பது ஒரு எதிர்ச் சீர்க் கெர்மிசியன்.

[குறிப்பு (1): ஒரு கெர்மிசியனில் தலையாய மூலைவிட்ட மூலங்கள் மெய்யெண்களாக இருக்கவேண்டும். ஓர் எதிர்ச்சீர்க் கெர்மிசியனில் தலையாய மூலைவிட்ட மூலங்கள் தூய கற்பனை எண்களாக அல்லது சுழியாக இருக்க வேண்டும்.

(2) A-ன் மூலங்கள் மெய்யெண்கள் என்றால் $\bar{A} = A$ மற்றும் $\bar{A}^T = A^T$ என்பது தெளிவாகிறது. இதிலிருந்து $\bar{A}^T = A$ என்ற கெர்மிசியன் அணிக்கான நிபந்தனை, $A^T = A$ என்ற மெய் சமச் சீரணிக்கான நிபந்தனையாக மாறுகிறது. எனவே, மெய் சமச் சீரணிகளுக்கான தேற்றங்களைக் கெர்மிசியன் அணிகளுக்கான தேற்றங்களின் துணை முடிவுகளாகப் பெறலாம் என்று புலனாகிறது.]

§ 90. கெர்மிசியன் அணிகளின் பண்புகள்

§ 90·1. ஒரு கெர்மிசியனின் எல்லா தனித்தன்மை மூலங்களும் மெய்யெண்களே ஆகும்.

§ 90·2. ஓர் எதிர்ச்சீர் கெர்மிசியன் அணியின் தனித்தன்மை மூலங்கள், சுழி அல்லது தூய கற்பனை எண்களாகும்.

§ 90·3. A என்ற கெர்மிசியன் அணியின் இரண்டு வெவ்வேறு தனித்தன்மை மூலங்கள் λ_i, λ_j-ஆகியவற்றிலிருந்து கிடைக்கப்பெறும் வெக்டர்கள் முறையே X_i, X_j என்றால்

$$\bar{X}_i^T X_j = 0$$

அதாவது X_i, X_j செங்குத்து வெக்டர்களாகும்.

மேலே கூறிய கெர்மிசியன் அணியின் பண்புகள் மெய் சமச் சீரணியின் பண்புகளாகவே இருப்பதைக் கவனிக்கவும். மெய் சமச் சீரணிகளுக்குப் பயன்படுத்திய முறைகளையே பயன்படுத்தி மேற்கூறிய பண்புகளையும் நிறுவலாம்.

மாதிரிக்கணக்கு :

$$\begin{bmatrix} 3i & 2+5i \\ -2+5i & 4i \end{bmatrix}$$ என்ற எதிர்ச்சீர்

கெர்மிசியனின் தனித்தன்மை மூலங்களைக் காண்க.

தனித்தன்மைச் சமன்பாடு

$$(3i - \lambda)(4i - \lambda) - (5i + 2)(5i - 2) = 0$$

அதாவது, $12i^2 - 7i\lambda + \lambda^2 - (-25 - 4) = 0$

அதாவது, $-12 - 7i\lambda + \lambda^2 + 29 = 0$

அதாவது, $\lambda^2 - 7i\lambda + 17 = 0$

$$\therefore = \frac{7i \pm \sqrt{-49 - 68}}{2}$$

$$= \frac{7i \pm \sqrt{117}\, i}{2}$$

$\therefore$ தனித்தன்மை மூலங்கள்

$$\left(\frac{7 + \sqrt{117}}{2}\right) i, \ \left(\frac{7 - \sqrt{117}}{2}\right) i$$ ஆகும்.

பயிற்சி—9.

I. கீழ்வரும் அணிகள் எந்த வகையைச் சார்ந்தவை எனக் காண்க.

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ (6) $\begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & l \\ 2 & -i & 0 \end{bmatrix}$

(7) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ (8) $\begin{bmatrix} i & 1-i & 2 \\ -1-i & 3i & i \\ -2 & i & 0 \end{bmatrix}$

(9) $\begin{bmatrix} 5 & 2+i & 3+i \\ 2-i & 2 & 5+2i \\ 3-i & 5-2i & 0 \end{bmatrix}$ (10) $\begin{bmatrix} 3i & 1+i & 2+i \\ -1+i & 2i & 2+3i \\ -2-i & -2+3i & 0 \end{bmatrix}$

II. பின்வரும் மெய் சமச்சீர் அணிகளின் தனித்தன்மை மூலங்களையும் வெக்டர்களையும் காண்க.

(1) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

III. கீழ்காணும் கெர்மிசியன் அணிகளின் தனித்தன்மை மூலங்களைக் காண்க.

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 5 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} i & 1-i \\ -1-i & 0 \end{bmatrix}$

IV. பின்வரும் மெய் சமச்சீர் அணிகளை diag $(1, 1, \ldots 1, -1, -1, \ldots -1, 0, 0, \ldots 0)$ என்னும் வடிவத்தில் மாற்றியமைக்கவும். அவ்வாறு மாற்றியமைக்கும் நிலைமாற்ற அணிகள் யாவை?

(1) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 3 & 5 & 8 & 10 \\ 2 & 8 & 10 & -8 \end{bmatrix}$

V. கீழ்க்கண்ட மெய்சமச்சீர் அணிகளுக்குச் செங்குத்து ஒப்புமையாக உள்ள சமமூலை வரை அணிகளைக் காண்க. அவ்வாறு மாற்றியமைக்கும் செங்குத்து அணிகள் யாவை?

(1) $\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

VI. பின்கண்ட இருபடிக் கோவை அமைப்புகளை ஒருங்கிசைவு ஒருபடி நிலைமாற்றத்தாலும் லாக்ரான்சி முறையாலும் இயல் வடிவத்திற்கு மாற்றியமைக்கவும். அவற்றின் அளவை, சிக்னேச்சர் மற்றும் மதிப்பு வகைகள் ஆகியவற்றையும் காண்க.

(1) $x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_2\,x_3 + 8x_1\,x_3$

(2) $x_1^2 + 6x_2^2 + 18\,x_3^2 + 4x_1\,x_2 + 8x_1\,x_3 - 4x_2\,x_3$

(3) $x_1^2 + 3x_2^2 + 8x_3^2 - 8x_4^2 + 4x_1\,x_2 + 6x_1\,x_3$
$\quad + 4x_1\,x_4 - 10x_2\,x_3 + 16x_2\,x_4 + 10x_3\,x_4$

(4) $x^2 + 2xy + 4\,xz - 2yz$

(5) $x_1\,x_2 - 4\,x_1\,x_4 - 2x_2\,x_3 + 12x_3\,x_4$

VII. கீழ்க்காணும் இருபடிக் கோவை அமைப்புகளைச் செங்குத்து இயல்வடிவத்திற்கு மாற்றியமைக்கவும். அவற்றின் மதிப்பு வகைகளையும் காண்க.

(1) $x_1^2 - 12\, x_1\, x_2 - 4x_2^2$

(2) $3x^2 + 2xy + 2xz + 4yz$

(3) $7x^2 - 8y^2 - 8z_3 + 8xy - 8xz - 2yz$

(4) $2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + x_1\, x_3$

VIII. B என்பது மெய்மூலங்களைக் கொண்ட பூச்சிய மில்கோவை அணி எனில், $X^T\,(B^T\,B)\,X$ என்பது வலிவுள்ள நேர் இருபடிக் கோவை அமைப்பு என நிறுவுக.

IX. $A = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ i & 0 & 2-i \\ 1+i & 2-i & 10+2i \end{bmatrix}$

என்னும் கலப்பு மூலங்களைக் கொண்ட சமச்சீர் அணியை ஒருங்கிசைவு மாற்றங்களால் diag (1, 1, 1) என மாற்றி யமைக்கும் அணியைக் காண்க.

X. (a) மெய் சமச்சீர் அணி A-ன் தனித்தன்மை மூலங்கள் மெய்யெண்கள் என்றும், A^2-ன் தனித்தன்மை மூலங்கள் நேர் மெய்யெண்கள் என்றும் நிறுவுக.

(b) $\begin{bmatrix} -a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ என்னும் அணியின்

தனித்தன்மை வெக்டர்கள் $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ என நிறுவுக.

[B.E., '74]

XI. (1) $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

எனில், $| \lambda B - A | = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களைப் பயன்படுத்தி $X^T AX$ மற்றும் $X^T BX$ ஆகிய இருபடிக் கோவை அமைப்புகளை ஒரே நேரத்தில் இயல் வகுவ அமைப்புகளாக்கவும்.

$$(2)\ A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$X = [x_1, x_2, x_3]^T$ எனில், $X^T AX$ மற்றும் $X^T BX$ ஆகிய இருபடிக் கோவை அமைப்புகளை இயல்வடிவ அமைப்புகளாக மாற்றுவதற் கேற்ற ஒருபடி நிலைமாற்றத்தைக் காண்க.

$$(3)\ A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$X = [x_1, x_2, x_3]^T$, $Y = [y_1, y_2, y_3]^T$ எனில்,

$X^T AX$ ஐ $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3$ ஆகவும்

$X^T BY$ ஐ $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ ஆகவும் ஒரே நேரத்தில் மாற்றியமைக்கும் ஒருபடி நிலைமாற்றத்தைக் காண்க. மேலும், $| \lambda B - A | = 0$-ன் மூலங்கள் $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ என்று நிறுவுக.

விடைகள்

I. (1) சமமூலை வரை அணி

(2) (3, 3) தரமுள்ள அலகு அணி

(3) (3, 2) தரமுள்ள பூச்சிய அணி

(4) கீழ் முக்கோண அணி

(5) மெய்சமச் சீரணி

(6) கெர்மிசியன் (7) மெய் எதிர்ச்சீரணி

(8) எதிர்ச்சீர் கெர்மிசியன்

(9) கெர்மிசியன் (10) எதிர்ச்சீர் கெர்மிசியன்

II. (1) $-2, -2, -1$; $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(2) $0, \quad 6, \quad 3$; $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

III. (1) $\dfrac{7 \pm \sqrt{17}}{2}$ (2) $2i, -i$

IV. (1) diag $(1, -1)$; $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(2) diag $(1, 1, -1)$; $\begin{bmatrix} 1 & -2\sqrt{2} & -2 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$

(3) diag $(1, 1, 1)$;

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{3}{7}} & -\dfrac{2}{7}\sqrt{\dfrac{7}{16}} \\ 0 & \sqrt{\dfrac{3}{7}} & \dfrac{1}{7}\sqrt{\dfrac{7}{16}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\dfrac{7}{10}} \end{bmatrix}$$

(4) diag $(1, -1, 1, 0)$; $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

V. (1) diag $(5, -8)$; $\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \\ -\frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}$

(2) diag $(1, 4, -2)$; $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

(3) diag $(7, -2, -2)$; $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} \end{bmatrix}$

(4) diag $(2, 2, 8)$; $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$

(5) diag (2, 3, 6); $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$

VI. (1) $y_1^2 - 2y_2^2 + 9y_3^2$; 3 ; 1

(2) $y_1^2 + 2y_2^2 - 48y_3^2$; 3 ; 1

(3) $y_1^2 - y_2^2 + 4y_3^2$; 3 ; 1

(4) $X^2 - Y^2 + Z^2$; 3 ; 1

(5) $y_1^2 - y_2^2 + y_3 - y_4^2$; 4 ; 0

அனைத்தும் வலிவற்ற அமைப்புகள்.

VII. (1) $5y_1^2 - 8y_2^2$; [V] (1) காண்க]

(2) $X^2 + 4Y^2 - 2Z^2$; $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

(3) $9X^2 - 9Y^2 - 9Z^2$; $\begin{bmatrix} \frac{4}{\sqrt{18}} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$

(4) $y_1^2 + 3y_2^2 + 3y_3^2$; $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

மேலே உள்ளவற்றில் (1) — (3): வலிவற்ற அமைப்புகள்.
(4): வலிவுள்ள நேர் அமைப்பு.

XI. (1) $y_1^2 - 3y_2^2$; $y_1^2 + y_2^2$

(2) $$X = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{10}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3\sqrt{10}} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3\sqrt{10}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

(3) $$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

II. வெக்டர் பகுவியல்

(VECTOR ANALYSIS)

1. வெக்டர் அறிமுகம்

(Introduction to Vectors)

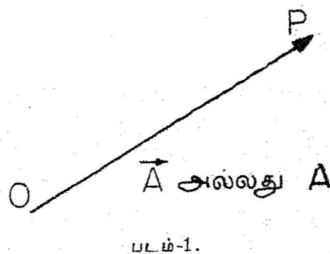
§ 1. எண்கணியம் வெக்டர் கணியம் (Scalar and Vector quantities)

ஒரு பொருளின் கன அளவு (volume), அடர்த்தி (density), வெப்பநிலை (temperature) முதலியவற்றை அறிந்து கொள்வதற்கு உரிய அலகுகளோடு கூடிய எண்கள் (numbers) பயன்படுகின்றன. ஒரு குடுவையின் கொள்ளளவு 250 க செமீ, காற்றின் அடர்த்தி 1·173/கிகி/க.மீ, நம் உடலின் வெப்பநிலை 98·4°F என்பன வற்றில் வரும் எண்களால் மேற்கூறிய கணியங்களின் பண்புகள் தெளிவாகின்றன. இக் கணியங்களுக்குத் திசைப்பண்பு (directional property) இல்லை என்பது வெளிப்படை. இவை போன்ற திசை பண்பிலாக் கணியங்களுக்கு எண் கணியங்கள் (scalar quantities) அல்லது எண்ணிகள் (scalars) என்று பெயர்.

ஆனால், இடப்பெயர்ச்சி (displacement), திசைவேகம் (velocity), முடுக்கம் (acceleration), விசை (force), உந்தம் (momentum) முதலானவற்றை அறிந்து கொள்ள அவற்றின் எண் மதிப்போடு திசைப்பண்பும் கொடுக்கப்பட வேண்டும் இவை போன்று பெறுமானமும் திசைப்பண்பும் (magnitude and direction) உள்ள கணியங்களுக்கு வெக்டர் கணியங்கள் (Vector quantities) அல்லது சுருக்கமாக வெக்டர்கள் (Vectors) என்று பெயர்.

§ 2. வெக்டரைக் குறிக்கும் விதம்

வரைபடத்தில் ஒரு வெக்டரை அம்புக்குறியோடு கூடிய ஒரு நேர்கோட்டால் குறிக்கப் படும். அந்தக் கோட்டின் நீளம் வெக்டரின் பெறுமானத்திற்கு விகித சமமாக இருக்கவேண்டும். அம்புக்குறியிலிருந்து வெக்டரின் திசை அறியப்படும். படம்-1-ல் **A** என்ற வெக்டர் அம்புக்குறி யோடு கூடிய OP என்ற நேர் கோட்டால் குறிக்கப்பட்டுள்ளது.



படம்-1.

எழுதும்போது ஒரு வெக்டரை $\vec{A}$ அல்லது $\vec{OP}$ என்ற மேல் அம்புக்குறியோடு கூடிய ஆங்கில எழுத்துக்களால் எழுதுவது மரபு. சிலர், அம்புக்குறிக்குப் பதிலாக மேற்கோடு இட்டு (எடுத்துக்காட்டு. $\overline{OP}$ என்றும்) எழுதுவர்.

புத்தகங்களில் அச்சிடும்போது மேல் அம்புக் குறிக்குப் பதிலாக, வெக்டர்களைக் குறிக்க தடித்த எழுத்துகளைப் (bold face letters) பயன்படுத்துவது மரபு. இன்றியமையாதபோது அம்புக்குறியுடனும் அச்சிடுவர். எடுத்துக்காட்டு: **A, B, P, Q, a, b,**

$\vec{OA}$ என்ற வெக்டரில் O என்பது தொடக்கப் புள்ளி (அல்லது ஆதி) (initial point or origin) என்றும், A என்பது முடிவுப்புள்ளி (terminal point or terminus) என்றும் பெயர் பெறும். ($\vec{AO}$ என்ற வெக்டரில் A தொடக்கப்புள்ளி, O முடிவுப்புள்ளி என்று அறிக.)

A என்ற வெக்டரின் பெறுமானம் | **A** | அல்லது அதற்குரிய சாதாரண சிறிய எழுத்து a (தடித்த எழுத்து அல்ல) என்ற குறியீட்டால். குறிக்கப்படும். இனி வருவனவற்றில் மேற்கூறிய இரண்டு குறியீடுகளையும் சூழ்நிலைகேற்பப் பயன்படுத்துவோம்.

A என்ற வெக்டரில் 1 அலகு நீளமுள்ள வெக்டரை (பொதுவாக) $\hat{\mathbf{A}}$ என்ற குறியீட்டால் குறிப்போம். அதை அலகு வெக்டர் என்று வழங்குவோம்.

எனவே, $\hat{\mathbf{A}} = a\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\hat{\mathbf{A}}$ என்பதும்

$$\hat{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{\mathbf{A}}{a}$$ என்பதும்

எளிதில் புரியும்

[குறிப்பு (1) : மேற்கூறிய குறியீட்டு விதியிலிருந்து விலக்கு பெற்ற வெக்டர்கள் : அலகுத் தொடுகோட்டு வெக்டர், அலகுச் செங்கோட்டு வெக்டர், $x-$, $y-$, $z-$ திசைகளில் அலகு வெக்டர்கள் முதலியன. இந்த அலகு வெக்டர்களுக்கு ^ என்ற குறியீட்டை இடுவது வழக்கமில்லை.

(2) ஒரு வெக்டரின் பெறுமானம் சுழி (அதாவது பூச்சியம்) (zero) என்றால் அதன் தொடக்கப் புள்ளியும் முடிவுப் புள்ளியும் ஒன்றிவிடும். இதற்குச் சுழி வெக்டர் அல்லது பூச்சிய வெக்டர் (null vector) என்று பெயர். இவை O என்று குறிப்பிடுவர்.

§ 3. சம வெக்டர்கள்

A, **B** என்ற இரு வெக்டர்களின் தொடக்க முடிவுப் புள்ளிகள் வெவ்வேறாக இருந்தாலும், அவற்றின் பெறுமானங்கள் சமமாயும் திசைகள் மாறாமலும் இருந்தால் அந்த இரு வெக்டர்களைச் சமவெக்டர்கள் (equal vectors) என்று கூறுகிறோம்.

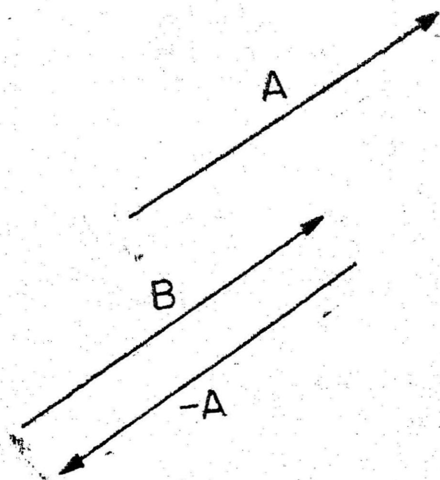
இதை $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ என்று குறிப்பிடுகிறோம்.

இரண்டு வெக்டர்களின் பெறுமானம் சமமாக இருந்து அவற்றின் திசைகள் நேர் எதிராக இருந்தால், ஒன்று மற்றதன் எதிர் வெக்டர் (negative vector) என்று கூறப்படும்.

[குறிப்பு (1) : ஒரு சில வெக்டர்களை திசை மாறாமல் இணையாகவே வேண்டிய இடத்திற்கு நகர்த்தலாம். இது போன்று நகர்த்தப்படக் கூடிய வெக்டர்களைத் தன்வய வெக்டர்கள் (free vectors) என்பர்.

(2) விசை போன்ற வெக்டர்களில் விசை செலுத்தும் புள்ளியையோ அல்லது விசை செலுத்தும் கோட்டையையோ நாம் விருப்பம்போல் நகர்த்த முடியாது. இவை போன்ற வெக்டர்களுக்கு வரம்புடைய வெக்டர்கள் (bound vectors) என்று பெயர்.

(3) O என்ற நிலையான ஆதி (fixed origin)-லிருந்து A என்ற புள்ளியின் நிலையைக் (position) குறிக்கும் வெக்டர் $\overrightarrow{OA}$-க்கு ஆதி O-வைக் (குறித்து) A-ன் நிலைவெக்டர் (position vector) என்று பெயர்.



படம்-2.

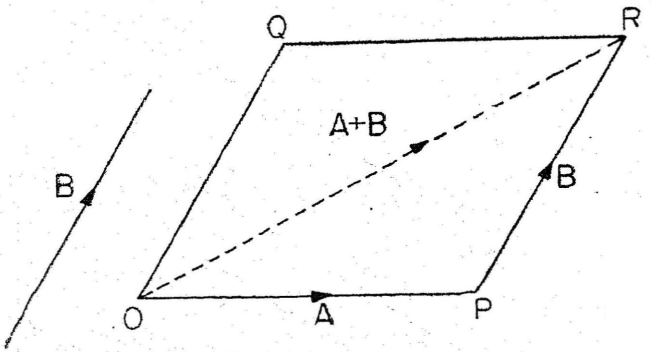
இனிவரும் நிலைவெக்டர்களுக்கு, மாற்று ஆதி கொடுக்கப் படாவிட்டால், ஆதி O என்று கொள்ளப்படுகிறது என்று அறிக.]

§ 4. இரண்டு வெக்டர்களின் கூட்டல்

கொடுத்துள்ள இரண்டு வெக்டர்களை **A**, **B** எனக் குறிப்போம். **A**-ன் தொடக்கப்புள்ளி O, முடிவுப்புள்ளி P என்போம். **B** ஐ திசைமாற்றுமல் நகர்த்திக் கொண்டே வந்து B-ன் தொடக்கப் புள்ளி A-ன் முடிவுப் புள்ளி P-ல் சரியாகப் பொருந்துமாறு நிறுத்தவும். இந்த நிலையில் B-ன் முடிவுப்புள்ளி R என்க. O-வையும் R ஐயும் சேர்க்கவும்.

இதிலிருந்து **A**, **B**-களின் தொடர் இணைப்பானது $\overrightarrow{OR}$-க்குச் சமம் என்று தெளிவாகிறது. இதை $\overrightarrow{OR} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ என்று எழுதுவர். இதில் வரும் கூட்டலுக்கு வெக்டர் கூட்டல் என்று பெயர். இதனை முக்கோணவிதி முறையில் வெக்டர்களின் கூட்டல் என்றும் கூறுவர்.

$OPQR$ என்ற இணைகரத்தை முடித்துவைத்தால், $\overrightarrow{PO}$ என்பது அவ் இணைகரத்தின் மூலைவிட்ட வெக்டராகும். எனவே, $\overrightarrow{OR}$ **A** + **B** என்ற வெக்டர் கூட்டல் முறையை இணைகரவிதி என்றும் கூறுவர்.



படம்-3.

வெக்டர் கூட்டல் முறையை

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR}$$

என்ற வடிவத்தில் நினைவில் கொள்வது மிக்க பயனுடையதாகும்.

[குறிப்பு (1): படம் (3)-ல் $\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OR}$ அதாவது, **B** + **A** = **A** + **B**

மேலும், **A** + (**B** + **C**) = (**A** + **B**) + **C** என்பது வெளிப்படை.

எனவே, வெக்டர் கூட்டல் பரிமாற்று மற்றும் சேர்ப்பு விதிகட்குட்பட்டவை.

(2) இந்த முக்கோண விதியை விரிவுபடுத்தினால் பல்கோண விதி (polygonal law) கிடைக்கும் (படம் 4).

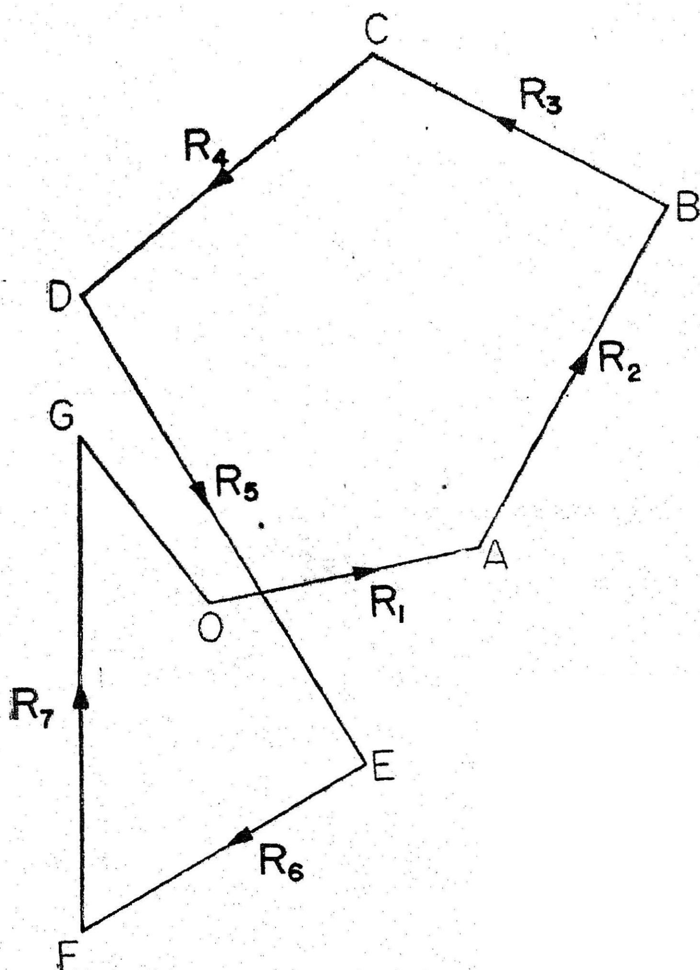
$\mathbf{R}_1 = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{R}_2 = \overrightarrow{OB}$, ... $\mathbf{R}_7 = \overrightarrow{OG}$ என்ற ஏழு வெக்டர்களின் கூட்டல் காண்போம்.

முக்கோண விதிப்படி, $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$

$$\therefore \quad \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{OB} + \vec{BC} = \vec{OC}$$

இதுபோலவே, $\vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{OD}$

... ...



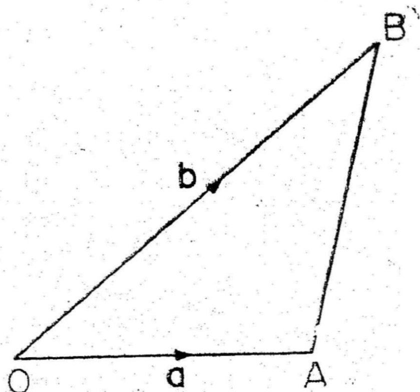
படம்-4.

$$\text{அதாவது, } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \ldots + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{OG}$$

$$\text{அதாவது, } \mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2 + \ldots + \mathrm{R}_7 = \overrightarrow{OG}$$

இதற்குப் பல்கோணவிதி என்று பெயர்.

(3) A, B என்ற இரண்டு புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர்களை முறையே **a**, **b** என்று குறிப்போம்.



படம்-5.

$$\text{அதாவது, } \mathbf{a} = \overrightarrow{OA}, \mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$$

$$\text{முக்கோண விதிப்படி, } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

$$\text{அல்லது } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

இதை " $\overrightarrow{AB} = A$-ன் நிலை வெக்டர் -- A-ன் நிலை வெக்டர்" என்று நினைவில் கொள்ளலாம்.

§ 5. ஒரு வெக்டரை எண்கணியம் m ஆல் பெருக்கல்

A ஒரு வெக்டர், m ஒரு நேர் (positive) எண்ணி என்றால், $m\mathbf{A}$ என்பது **A**-ன் திசையில் $m\,|\,\mathbf{A}\,| = ma$ பெறுமானமுள்ள ஒரு வெக்டருக்குச் சமமாகும். m எதிர் எண்ணி என்றால், $m\mathbf{A}$ என்பது **A**-ன் எதிர்திசையில் $|\,m\,|\,a$ பெறுமானமுள்ள ஒரு வெக்டருக்குச் சமமாகும்.

$$m\mathbf{A} = \mathbf{A}m \; ; \quad m(n\mathbf{A}) = (mn)\mathbf{A}$$

$$(m+n)\mathbf{A} = m\mathbf{A} + n\mathbf{A} \; ; \quad m(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = m\mathbf{A} + m\mathbf{B}$$

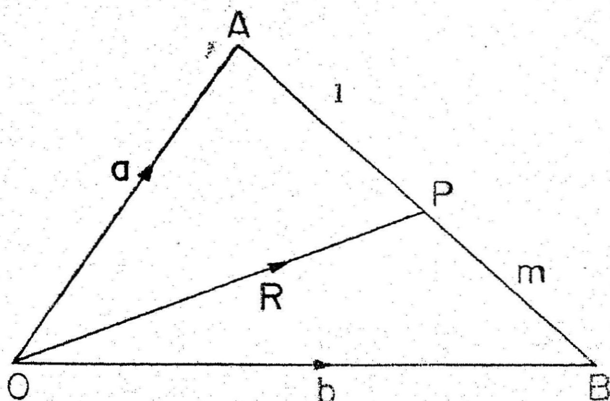
என்று எளிதில் அறியலாம்.

6·1. கொடுத்துள்ள இரண்டு புள்ளிகளின் பிணைக்கோட்டை $l : m$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி

A, *B* என்ற இரண்டு புள்ளிகளின் பிணைக்கோட்டை *P* என்ற புள்ளி $l : m$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கட்டும்.

A, *B*, *P*-களின் நிலைவெக்டர்களை முறையே $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{R}$ எனக் குறிப்போம்.

பின்பு $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{R} = \overrightarrow{OP}$



படம்-6.

படம்-6-ல் $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$

$$\therefore \quad \overrightarrow{AP} = \frac{l}{l+m}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

ஆனால், $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$

$$\therefore \quad \mathbf{R} = \mathbf{a} + \frac{l}{l+m}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

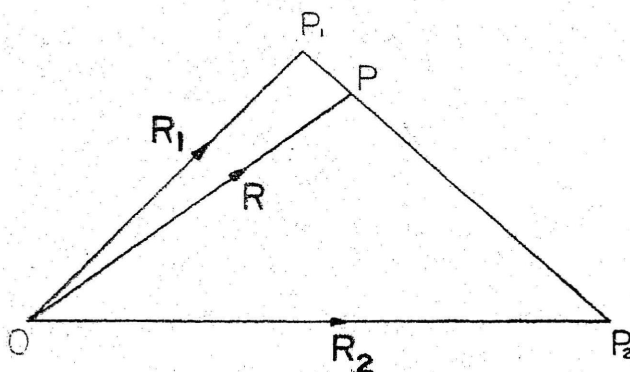
அதாவது, $\mathbf{R} = \dfrac{l\,\mathbf{b} + m\,\mathbf{a}}{l+m}$

[குறிப்பு (1): மேற்கூறியவற்றில் $m = -m$ எனப் பிரதியிட்டால், AB ஐ $l : m$ என்ற புறவிகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி P'-ன் நிலை வெக்டர் $\mathbf{R}' = \dfrac{l\mathbf{b} - m\mathbf{a}}{l - m}$

(2) AB-ன் நடுப்புள்ளி M என்றால் $OM = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$

§ **6·2** கொடுத்துள்ள இரு துகள்களின் (particles) திணிவு மையம் (centre of mass)

m_1, m_2 பொருண்மை (அல்லது திணிவு) (mass) உடை இரு துகள்கள் P_1, P_2 என்ற புள்ளிகளில் உள்ளன (படம்-7).



படம்-7.

P என்ற புள்ளி மேற்கூறிய P_1, P_2-களில் அமைந்துள்ள துகள்களின் திணிவு மையம் என்க. $P_1 P_2$ என்ற நேர்கோட்டில் P அமையும். மேலும், $\mathbf{R}_1 = \overrightarrow{OP_1}$, $\mathbf{R}_2 = \overrightarrow{OP_2}$, $\mathbf{R} = \overrightarrow{OP}$ எனில்,

இயற்பியல் (Phys cs) முறைப்படி

$$m_1 \cdot \overrightarrow{P_1P} = m_2 \cdot \overrightarrow{P_2P}$$

$$\therefore \quad \frac{\overrightarrow{P_1P}}{\overrightarrow{PP_2}} = \frac{m_2}{m_1}, \text{ அல்லது } \frac{\overrightarrow{P_1P}}{\overrightarrow{P_1P} + \overrightarrow{PP_2}} = \frac{m_2}{m_2 + m_1}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{P_1P} = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) \overrightarrow{P_1P_2} = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) (\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1})$$

$$\therefore \quad \mathbf{R} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P}$$

$$= \mathbf{R}_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1)$$

அதாவது, $\mathbf{R} = \dfrac{m_1\mathbf{R}_1 + m_2\mathbf{R}_2}{m_1 + m_2}$

[குறிப்பு (1): இந்த முறையை மீண்டும் மீண்டும் பயன் படுத்தி, n துகள்களின் திணிவு மையத்தைக் காணலாம்.

$P_1, P_2, \ldots P_n$ என்ற புள்ளிகளிலமைந்தும், $m_1, m_2, \ldots m_n$ என்ற திணிவுகளைப் பெற்றுமுள்ள n துகள்களின் நிலைவெக்டர்கள் முறையே $\mathbf{R}_1, \mathbf{V}_2, \ldots \mathbf{R}_n$ என்றால், அவற்றின் திணிவு மையமான G-ன் நிலைவெக்டர்

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{R}_1 + m_2\mathbf{R}_2 + \ldots + m_n\mathbf{R}_n}{m_1 + m_2 + \quad + m_n}$$

(2) குறிப்பு (1)-ல் $P_1, P_2, \ldots P_n$ என்ற புள்ளிகளில் அமைந்த துகள்களின் திணிவுகளைச் சமமாக எடுத்துக் கொண்டால், அப்போது G என்பது $P_1, P_2, \ldots P_n$ என்ற புள்ளி களின் தொகுதி மையத்தைக் (centroid of the point system) குறிக்கும். G-ன் நிலைவெக்டர்

$$\mathbf{R} = \frac{1}{n}(\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_n + \ldots + \mathbf{R}_n)$$

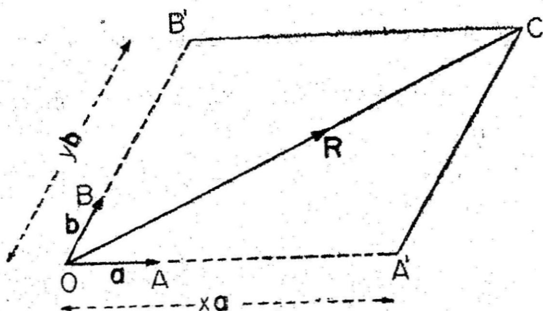
(3) ABC என்ற முக்கோண உச்சிகளின் நிலை வெக்டர்கள் முறையே $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ என்றால் அதன் மையக் கோட்டுச் சந்தி (centroid) G-ன் நிலை வெக்டர்

$$\mathbf{R} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})]$$

§ 7. கொடுத்துள்ள இணையல்லாத இரு வெக்டர்கள் a, b-களின் தளத்தில் அமையும் எந்த ஒரு வெக்டர் R ஐயும் a, b திசை களில் கூறுகளாக (components) எழுதலாம்.

$\mathbf{R}$ என்ற வெக்டர் $\mathbf{a}, \mathbf{b}$-களுக்கு இணையாக இல்லையெனக் கொள்வோம். $\mathbf{R}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ ஆகிய மூன்று வெக்டர்களுக்கும் ஆதியாக O-வைக் கொள்வோம். $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{R} = \overrightarrow{OC}$ என்போம்.

a, b–களுக்கு இணையாக C வழியே $\overrightarrow{B'C}$, $\overrightarrow{A'C}$ வரைக. [படம் (8)].



படம் 8.

$$|OA'| = x\,|\overrightarrow{OA}|, \quad |\overrightarrow{OB}| = y\,|\overrightarrow{OB}| \text{ என்க.}$$

$$\therefore \quad OA' = x\,\mathrm{a}\,; \quad \overrightarrow{OB'} = y\,\mathrm{b}$$

ஆனால் இணைகர விதிப்படி $\overrightarrow{O\ \ } = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$

அதாவது, $\mathrm{R} = x\mathrm{a} + y\mathrm{b}$

எனவே, a, b திசைகளில் R-ன் கூறுகள் முறையே $x\mathrm{a}$, $y\mathrm{b}$ ஆகும்.

[குறிப்பு : R என்பது a-க்கு இணையானால் $\mathrm{R} = x\mathrm{a} + O\cdot\mathrm{b}$; b-க்கு இணையானால் $\mathrm{R} = O\cdot\mathrm{b} + y\cdot\mathrm{b}$

(2) கொடுத்துள்ள a, b R வெக்டர்களுக்கு ஒரேயொரு (unique) x, y எண்ணித் தொகுதி (scalar system) தான் உண்டென்பது வெளிப்படை.

x, y ஆகிய எண்ணிகள் – குறியுடைய கணியங்களாகவும் இருக்கலாம்.]

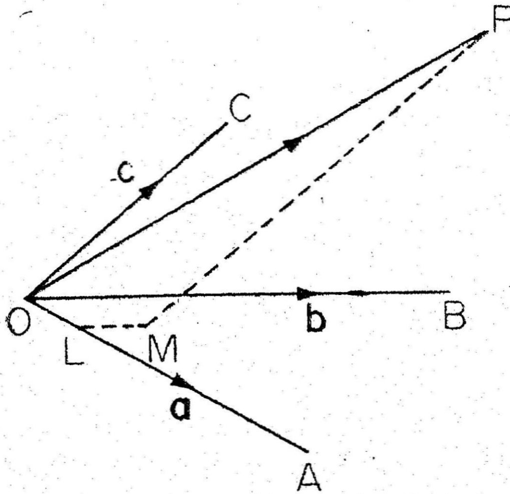
8. முப்பரிமாண வெளி (3 dimensional space)-ல் உள்ள R என்னும் எந்த ஒரு வெக்டரையும் ஒரு தளத்தில் அமையாத a, b, c என்னும் கொடுத்துள்ள மூன்று வெக்டர்கள் திசைகளில் கூறுகளாகப் பிரிக்கலாம்.

a, b, c, R ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று இணையில்லா வெக்டர்கள் என்றும், அவற்றின் ஆதியை O என்றும் எடுத்துக் கொள்வோம்.

மேலும்,

$\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$, $\mathbf{R} = \overrightarrow{OP}$ என்போம்.

$\overrightarrow{CO}$-க்கு இணையாக PM வரைக. இது AOB தளத்தில் M-ல் வெட்டட்டும். RO-க்கு இணையாக $\overrightarrow{ML}$ வரைக. இது OA-வை L-ல் சந்திக்கட்டும்.



படம்-9.

§ 4, குறிப்பு 2-ல் விளக்கியபடி

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MP} \qquad \ldots \quad (1)$$

$|\overrightarrow{OL}| = x\,|\overrightarrow{OA}|$ என்றால், $\overrightarrow{OL} = x\,\mathbf{a}$

இவ்வாறே, $|\overrightarrow{LM}| = y\,|\overrightarrow{OB}|$ என்றால், $\overrightarrow{LM} = y\,\mathbf{b}$

மற்றும், $|\overrightarrow{MP}| = z\,|\overrightarrow{OC}|$ என்றால், $\overrightarrow{MP} = z\,\mathbf{c}$.

∴ சமன்பாடு (1)-லிருந்து

$$\mathbf{R} = x\,\mathbf{a} + y\,\mathbf{b} + z\,\mathbf{c}$$

அதாவது, $\mathbf{R}$-ன் கூறுகள், $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ திசைகளில் முறையே $x\mathbf{a}$, $y\,\mathbf{b}$, $z\mathbf{c}$ ஆகும்.

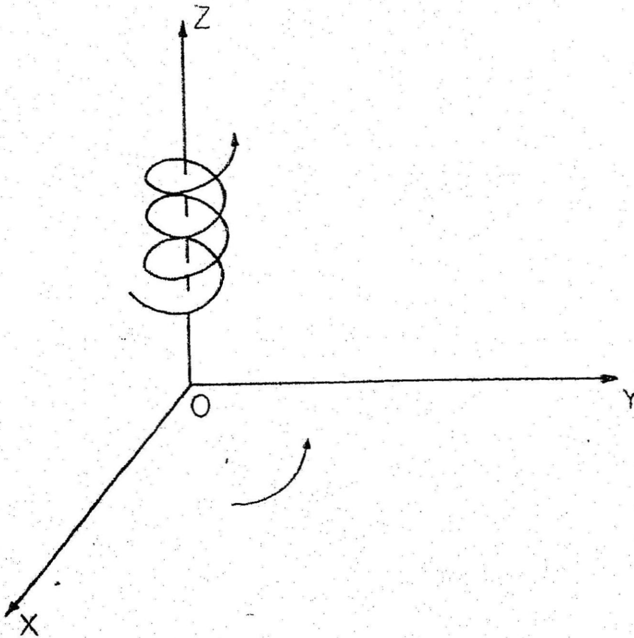
[குறிப்பு (1) : R என்பது a-க்கு இணையென்றால், $\mathbf{R} = x\,\mathbf{a} + O\cdot\mathbf{b} + O\cdot c$.

(2) a, b, c ஆகியவை அடிப்படை வெக்டர்கள் (base vectors) என்ற பெயர் பெறும்.

வரைவு முறையிலிருந்து. கொடுத்துள்ள a, b, c, R வெக்டர் களுக்கு ஒரேயொரு (unique) x, y, z எண்ணித் தொகுதி (scalar system) தான் உண்டென்பது புலனாகும்.

x, y, z ஆகியவற்றிற்கு எதிர்க் குறியுடைய மதிப்புகளும் இருக்கலாம்.

§ 9. வலக்கைத் திருகாணி குத்து அச்சுகள் (Right handed orthogonal axes of co-ordinates)



படம்-10.

$\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$, $\overrightarrow{OZ}$ என்ற வட்ட வரிசையில் (cyclic order) மூன்று குத்து அச்சுகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

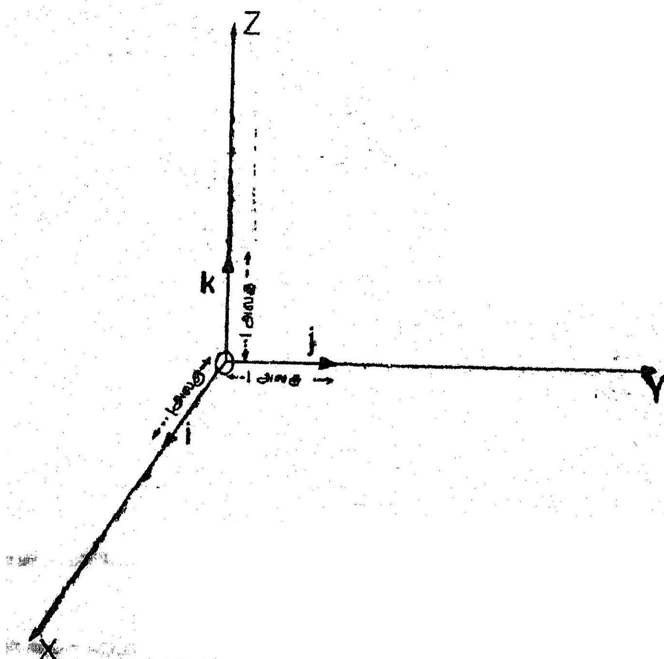
ஒரு வலக்கைத் திருகாணியை $\overrightarrow{OZ}$-ன் மேல், அதன் நுனி O-ல் பொருந்தும்படியும் அதன் தலை $\overrightarrow{OZ}$ திசையில் இருக்குமாறும் அமைக்கவும்.

$\overrightarrow{OX}$ முதல் $\overrightarrow{OY}$ வரை உள்ள கோண திசையில் அந்தத் திருகாணியை 90° சுழற்றவும். திருகாணியின் முனை $\overrightarrow{OZ}$ திசையில் முன்னேறினால், $\overrightarrow{OX}$ $\overrightarrow{OY}$ $\overrightarrow{OZ}$ என்பவை வலக்கைத் திருகாணி குத்து அச்சுகள் என்ற பெயர் பெறும் (படம் 10).

[குறிப்பு (1): $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$, $\overrightarrow{OZ}$ ஆகிய அச்சுகளை "வலக்கை அச்சுகள்" என இனிச் சுருக்கமாகக் குறிப்போம்.

(2) மேலே விளக்கியவை போன்று $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ என்று மூன்று வரிசைப் படுத்திய வெக்டர்கள் வலக்கை வெக்டர் தொகுதி (right handed vector system) என வழங்கப்படும்.]

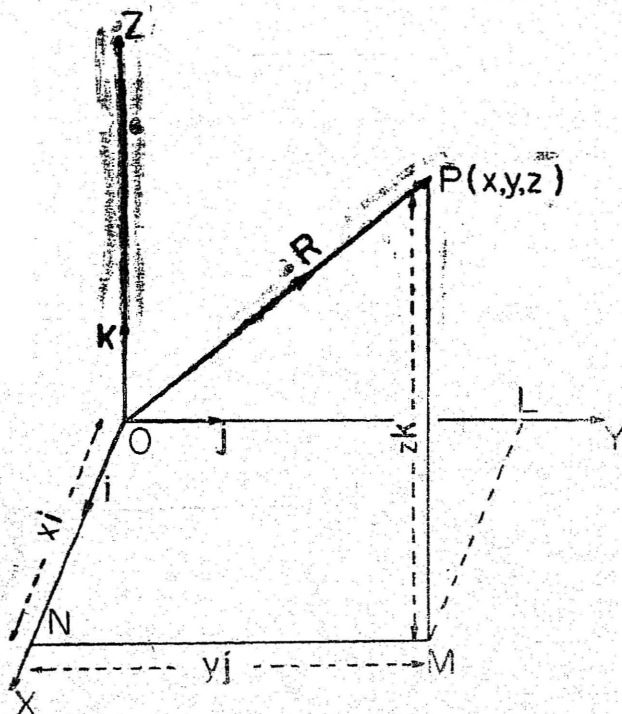
§ 10. குத்து அச்சுகள் $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$, $\overrightarrow{OZ}$ திசைகளில் அடிப்படை அலகு வெக்டர்கள்



$\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ}$ என்னும் வலக்கை குத்து அச்சுகளில் 1 அலகு உள்ள மூன்று வெக்டர்களை முறையே **i**, **j**, **k** என்று குறிப்பது வழக்கம் [படம் (11)]. இந்த அலகு வெக்டர்களை அடிப்படை அலகு வெக்டர்கள் (fundamental untt vectors) என்று கூறுவர்.

கொடுத்துள்ள **R** என்ற எந்த ஒரு வெக்டரையும் $\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ}$ திசைகளில் பின்வரும் கூறுகளாக எழுதலாம்:

R என்ற நிலைவெக்டரின் முடிவுப்புள்ளி P-ன் ஆயத் தொலைகள் (co-ordinates) (x, y, z) என்போம். P-லிருந்து XOY தளத்திற்கு PM என்ற செங்குத்துக் கோடு வரைக. OX-க்கு $\perp$ ஆக MN மற்றும் OY-க்கு $\perp$ ஆக ML வரைக [படம் (12)].



படம்-12.

இப்போது, $ON = x, \quad OL = NM = y, \quad MP = z$

$\therefore \quad \overrightarrow{ON} = x\mathbf{i}, \quad \overrightarrow{NM} = y\mathbf{j}, \quad \overrightarrow{MP} = z\mathbf{k}, \quad \overrightarrow{OP} = R$

ஆனல், $\vec{OP} = \vec{ON} + \vec{NM} + \vec{MP}$

அதாவது, $\boxed{\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}$

எனவே, R ஐ $x\mathbf{i}$, $y\mathbf{j}$, $z\mathbf{k}$ என்னும் கூறுகளாக எழுதலாம்.

மேலும், $\vec{OP}$-ன் பெறுமானம்,

$$= \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2}$$

அதாவது, $\boxed{r = |\mathbf{R}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

[குறிப்பு (1): x, y, z ஆகிய எண் கணியங்களை R-ன் குத்துக் கூறுகள் (rectangular components) என்பர்.

$\mathbf{F}$ என்பது ஏதாவதொரு வெக்டர் என்றுல் அதன் குத்துக் கூறுகளை F_x, F_y, F_z அல்லது F_1, F_2, F_3 அல்லது f_1, f_2, f_3 என்ற குறியீடுகளால் சூழ்நிலைக் கேற்பக் குறிப்பது வழக்கம்.

$$\text{அதாவது, } \mathbf{F} = F_x\,\mathbf{i} + F_y\,\mathbf{j} + F_z\,\mathbf{k} = F_1\,\mathbf{i} + F_2\,\mathbf{j} + F_3\,\mathbf{k}$$
$$= f_1\,\mathbf{i} + f_2\,\mathbf{j} + f_3\,\mathbf{k}$$

$$\text{எனவே, } f = |\mathbf{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$
$$= \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2} = \sqrt{f_1 + f_2^2 + f_3^2}$$

ஐயம் எழாத சூழ்நிலையில் "F-ன் குத்துக் கூறுகள்" என்பதற்குப் பதிலாக "F-ன் கூறுகள்" என்று சுருக்கமாகச் சொல்வதும் எழுதுவதும் வழக்கம்.

(2) $\vec{OP}$ என்ற வெக்டர் x—, y—, z—அச்சுகளிலிருந்து முறையே α, β, γ என்ற கோணங்களில் இருந்தால், ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$) ஆகியவற்றை $\vec{OP}$-ன் திசைக் கொசைன்கள் (Direction cosines) என [அல்லது தி. கொ. (Dc's) என்று சுருக்கமாக] வழங்குவர். திசைக் கொசைன்களின் விகித சமத்திலுள்ள கணியங்களைத் திசை விகிதங்கள் (Direction Ratios) அல்லது தி. வி. (D. R's) என்று கூறுவர்.

படம் (12)-ல், $N\hat{O}P = \alpha$, $O\hat{N}P = 90°$

$$\therefore \quad \cos = \frac{ON}{OP} = \frac{x}{r}$$

இவ்வாறே, $\cos\beta = \frac{y}{r}$; $\cos\gamma = \frac{z}{r}$

$$\therefore \quad x = r\cos\alpha, \quad y = r\cos\beta, \quad z = r\cos\gamma$$

எனவே, $\mathbf{R} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$

$$= (r\cos\alpha)\,\mathbf{i} + (r\cos\beta)\,\mathbf{j} + (r\cos\gamma)\,\mathbf{k}$$

இதிலிருந்து பின்வரும் முடிவு பெறப்படும்,

எந்த வெக்டரையும் x—, y—, z— திசைகளில் கூறுகளாக எழுதினுல் **i, j, k**-களின் குணகங்கள் அந்த வெக்டரின் திசை விகிதங்கள் ஆகும்.

(3) A என்ற புள்ளியின் நிலை வெக்டரை $a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ என்று குறிப்பிட்டால், $\overrightarrow{OA}$-ன் கூறுகள் a_1, a_2, a_3 என்றும், A-ன் ஆயத்தொலைகள் (a_1, a_2, a_3) என்றும் $\overrightarrow{OA}$-ன் திசை விகிதங்கள் (a_1, a_2, a_3) என்றும் அறிய வேண்டும்.

மறுதலையாக, A என்ற புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் (a_1, a_2, a_3) என்றுல், அதன் நிலைவெக்டர் $\overrightarrow{OA} = a_1\,\mathbf{i} + a_2\,\mathbf{j} + a_3\,\mathbf{k}$ என்றும் அறியப்படும்.

ஆனுல், $\mathbf{F} = f_1\,\mathbf{i} + f_2\,\mathbf{j} + f_3\,\mathbf{k}$ என்பது (நிலைவெக்டர் அல்லாத) ஏதாவதொரு பொது வெக்டர் என்றுல், அதன் கூறுகள் f_1, f_2, f_3 என்றும், அதன் திசை விகிதங்கள் (f_1, f_2, f_3), திசை கொசைன்கள் $\frac{f_1}{|\mathbf{F}|}, \frac{f_2}{|\mathbf{F}|}, \frac{f_3}{|\mathbf{F}|}$ என்றும் அறிய வேண்டும்.

F-ன் தொடக்க அல்லது முடிவுப் புள்ளியின் ஆயத்தொலைகளைக் கொடுத்துள்ள வெக்டரினின்று அறியவியலாது.

(4) $\mathbf{F} = f_1\,\mathbf{i} + f_2\,\mathbf{j} + f_3\,\mathbf{k}$, $\mathbf{G} = g_1\,\mathbf{i} + g_2\,\mathbf{j} + g_3\,\mathbf{k}$ என்றுல் $\mathbf{F} \pm \mathbf{G} = (f_1 \pm g_1)\,\mathbf{i} + (f_2 \pm g_2)\,\mathbf{j} + (f_3 \pm g_3)\,\mathbf{k}$.

(5) $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = 0$ என்றுல், $x=0$, $y=0$ $z=0$ ஆகும்.

நிறுவல் :

$x \neq 0$ என்றால், $i = -\left(\frac{y}{x}\right)\mathbf{j} - \left(\frac{z}{x}\right)\mathbf{k}$

அதாவது, $i = a\mathbf{j} + b\mathbf{k}$ ... (1)

இங்கே, $a = \frac{-y}{x}$, $b = \frac{-z}{x}$

ஆனால் § 7-ல் விளக்கியவாறு, $a\mathbf{j} + b\mathbf{k}$ என்ற வெக்டர் $\mathbf{j}$-ம், $\mathbf{k}$-ம் உள்ள YOZ தளத்தில் இருக்க வேண்டும். எனவே (1)-லிருந்து $\mathbf{i}$ என்ற வெக்டர் YOZ-க்கு $\perp$ ஆக உள்ள தளத்தில் உள்ளது. இந்த முரண்பாட்டால் (contradiction) $x = 0$, என அறிகிறோம். இது போலவே, $y = 0$, மற்றும் $z = 0$ ஆகும்.

(5) $a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k} = b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$ என்றால்,

$a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad a_3 = b_3$

நிறுவல்

கொடுத்த சமன்பாட்டை மாற்றியமைத்தால்

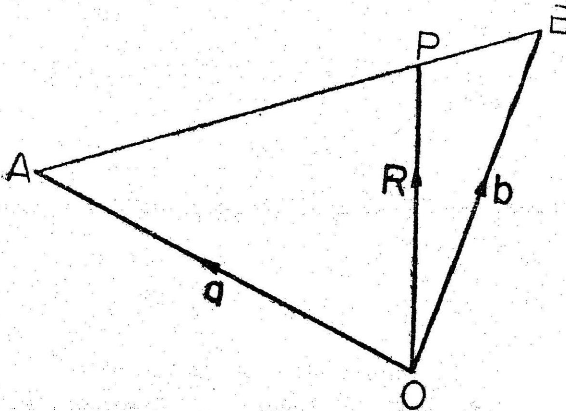
$$(a_1-b_1)\,\mathbf{i} + (a_2-b_2)\,\mathbf{j} + (a_3+b_3)\,\mathbf{k} = 0$$

எனவே, குறிப்பு (4)-ல் விளக்கியபடி

$$a_1-b_1 = 0 = a_2-b_2 = a_3-b_3$$

அதாவது, $a_1 = b_1$; $a_2 = b_2$; $a_3 = b_3$]

§ 11 இரு புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் ஒரு நேர்க் கோட்டின் சமன்பாடு



படம்-13.

A, *B* என்று கொடுத்துள்ள இரு புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர்கள் முறையே **a**, **b** ஆகுக.

AB என்ற நேர் கோட்டின் மேல் உள்ள ஏதாவதோரு புள்ளி *P*-ன் நிலை வெக்டர் **R** என்க.

$\therefore$ $AP : PB = t : 1$ [*t* ஒரு எண்ணிமாறி (scalar variables)] என்றால், § 6·1-ல் விளக்கியபடி

$$\mathbf{R} = \frac{t\mathbf{b} + \mathbf{a}}{t+1}$$

$$= \frac{t(\mathbf{b}-\mathbf{a}) + t\mathbf{a} + \mathbf{a}}{t+1}$$

$$= \frac{t}{t+1}(\mathbf{b}-\mathbf{a}) + \mathbf{a}$$

இப்போது, $\frac{t}{t+1} = \lambda$ என (மற்றோர் எண்ணிமாறியாகப்) பிரதியிட்டால்,

$$\mathbf{R} = \lambda(\mathbf{b}-\mathbf{a}) + \mathbf{a}$$

அதாவது, $\mathbf{R} = \mathbf{a} + \lambda(\mathbf{b}-\mathbf{a})$ ... (1)

λ-வின் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் மாறிப்புள்ளி *P*-ன் நிலை வெக்டர் கிடைக்கும். ஆகவே சமன்பாடு (1), *AB*-ன் வெக்டர் சமன்பாடு ஆகும்.

[குறிப்பு : *A*, *B* என்ற (நிலையான) புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைகள் முறையே (x, y, z), (x_2, y_2, z_2) என்றும் *P* என்ற மாறிப்புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் $(x, y. z)$ என்றும் வைத்துக் கொள்வோம்.

பின்பு, $\mathbf{R} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, $A = x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k}$,

$$B = x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k}$$

சமன்பாடு (1) ஐப் பயன்படுத்தினால்,

$$x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k} = x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k}+\lambda\,[(x_2-x_1)\mathbf{i}+(y_2-y_1)\mathbf{j} +(z_2-z_1)\mathbf{k}]$$

அதாவது, $(x-x_1)\mathbf{i} + (y-y_1)\mathbf{j} + (z-z_1)\mathbf{k}$

$$= \lambda\,[(x_2-x_1)\mathbf{i} + (y_2-y_1)\mathbf{j} + (z_2-z_1)\mathbf{k}]$$

$$\therefore \quad \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

இது முப்பரிமாண வெளியில் ஒரு நேர்கோட்டின் ஆயத் தொலை வடிவச் சமன்பாடு ஆகும்.

§ 12. ஒருபடித் தொடர்புடைய வெக்டர்களும் (Linearly dependent vectors and coplanar vectors)

ஒருபடித் தொடர்பிலா வெக்டர்கள், ஒருபடித் தொடர்புடைய வெக்டர்கள் ஆகியவற்றின் வரைவிலக்கணங்களை அதிகாரம் 1. § 37–ல் கண்டோம்.

A, **B**, **C**, **D** என்ற 4 வெக்டர்கள் ஒருபடித் தொடர்புடையன என்றால்,

$$x\mathbf{A} + y\mathbf{B} + z\mathbf{C} + t\mathbf{D} = \mathbf{0}$$

என்ற சமன்பாட்டில் x, y, z, t என்ற எண்ணிகள் எல்லாமே சுழி மதிப்புடையன அல்ல.

எனவே, $t \neq 0$ எனில்,

$$\mathbf{D} = \left(-\frac{x}{t}\right)\mathbf{A} + \left(-\frac{y}{t}\right)\mathbf{B} + \left(-\frac{z}{t}\right)\mathbf{C}$$

அதாவது, ஒருபடித் தொடர்புடைய நான்கு வெக்டர்களில் ஏதாவது ஒன்றை மற்ற மூன்றின் ஒருபடிச் சேர்மானமாக (linear combination) எழுத முடியும்.

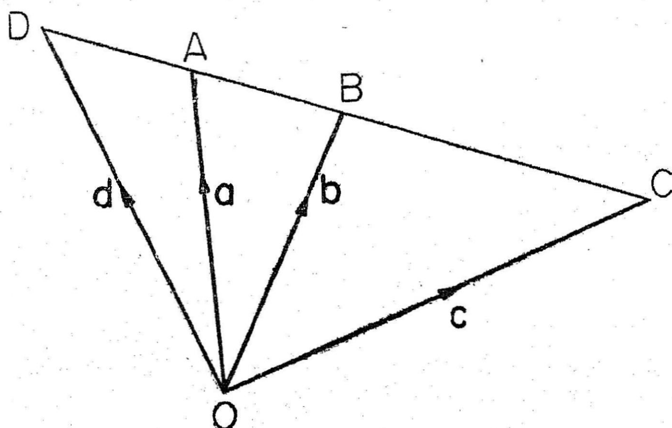
§ 10–ல் $\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ என்று பார்த்தோம். இதிலிருந்து **i**, **j**, **k** ஆகிய மூன்று அடிப்படை அலகு வெக்டர்களும் மற்றும் ஏதாவதொரு வெக்டர் **R** ஆக நான்கு வெக்டர்களும் ஒருபடித் தொடர்புடையவை என்பது தெளிவாகிறது.

ஆனால் § 10 குறிப்பு (5)–ல் $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = 0$ என்றால், $x = 0 = y = z$ எனப் பார்த்தோம், எனவே **i**, **j**, **k** என்ற மூன்று அடிப்படை அலகு வெக்டர்கள் ஒருபடித் தொடர்பிலாதவை என்று அறிகிறோம். அவ்வாறே. **i**, **j** ; **j**, **k** ; **k**, **i** ஆகிய இரண்டிரண்டு அடிப்படை வெக்டர்களும் ஒருபடித் தொடர்பிலாதவையே.

மேலும் § 7–ல், **a**, **b** என்பவை ஒரு தளத்துள்ள வெக்டர்கள் என்றால் $\mathbf{R} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$ எனக் கண்டோம். எனவே, மூன்று வெக்டர்கள் ஒரே தளத்தில் அமைவதற்கான நிபந்தனை : அந்த மூன்று வெக்டர்களும் ஒருபடித் தொடர்புடையனவாக இருத்தல் வேண்டும்.

மாதிரிக்கணக்கு (1)

a, b என்பவை A, B என்று புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள். AB ஐ நீட்டி $AC = 3\,AB$ என்றிருக்கும்படி C என்ற புள்ளியையும், BA யை நீட்டி $BD = 2\,BA$ என்றிருக்கும்படி D என்ற புள்ளியையும் தேர்ந்தெடுத்தால், அவற்றின் நிலை வெக்டர்களைக் காண்க.



படம்-14.

O ஆதி என்றால், $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$

$\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$, $\mathbf{d} = \overrightarrow{OD}$ எனக் கொள்வோம்

இப்போது, $AC = 3\,AB \quad \therefore \quad AC : CB - 3 : -2$

$$\therefore \quad \mathbf{c} = \frac{3\mathbf{b} - 2\mathbf{a}}{3 - 2} = 3\mathbf{b} - 2\mathbf{a} \qquad (\S\,6)$$

அதாவது, C-ன் நிலைவெக்டர் $= 3\mathbf{b} - 2\mathbf{a}$

மேலும், $BD = 2\,AB$

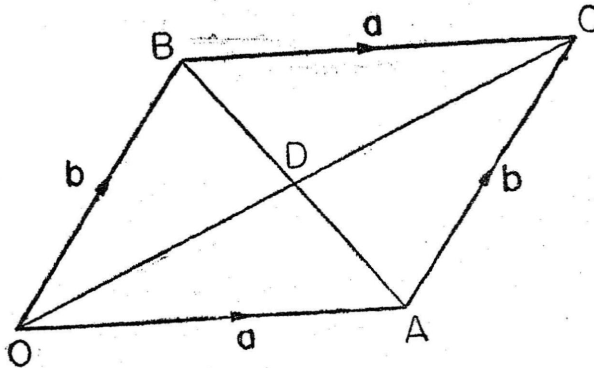
$\therefore \quad BD : DA = 2 : -1$

$$\therefore \quad \mathbf{d} = \frac{2\mathbf{a} - \mathbf{b}}{2 - 1} = 2\,\mathbf{a} - \mathbf{b}$$

அதாவது, D-ன் நிலைவெக்டர் $= 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$

மாதிரிக்கணக்கு (2)

ஓர் இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இரு சம கூறுக்குகின்றன என நிறுவுக.



படம்-15.

$OACB$ என்ற இணைகரத்தில் $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC}$ என்போம். OC, AB என்ற மூலைவிட்டங்கள் D-ல் வெட்டட்டும்.

இப்போது, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

$\therefore \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC}$-ன் ஒரு பகுதி $= x \cdot \overrightarrow{OC}$ (x எண்ணி)

$= x(\mathbf{a} + \mathbf{b})$

$AB = AO + OB = -\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$

$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}$-ன் ஒரு பகுதி $= y \cdot \overrightarrow{AB}$ (y எண்ணி)

$= y(\mathbf{b} - \mathbf{a})$

மேலும், $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DA}$

அதாவது, $\mathbf{a} = x(\mathbf{a}+\mathbf{b}) - y(\mathbf{b} - \mathbf{a})$

அதாவது, $\mathbf{a} = (x+y)\mathbf{a} + (x-y)\mathbf{b}$

$\therefore x + y = 1; \quad x - y = 0$

$\therefore x = y = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} \quad \therefore\ D$ என்பது OC-ன் நடுப்புள்ளி.

$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad \therefore\ D$ என்பது AB-ன் நடுப்புள்ளி.

எனவே, OC, AB ஆகிய இரண்டு மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இரு சம கூறுக்குகின்றன.

மாதிரிக்கணக்கு (3)

$\mathbf{A} = 2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-5\mathbf{k}, \quad \mathbf{B} = -5\mathbf{i}+\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ என்றால்,

அவற்றின் தொகுபயன் (resultant) வெக்டருக்கு இணையான அலகு வெக்டர் காண்க.

$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$-களின் தொகுபயன் வெக்டர் $\mathbf{C}$ எனில்,

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-5\mathbf{k}) + (-5\mathbf{i}+\mathbf{j}+3\mathbf{k})$$
$$= -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

$\therefore \quad \mathbf{C}$-க்கு இணையான அலகு வெக்டர் $= \dfrac{\mathbf{C}}{|\mathbf{C}|}$

$$= \frac{-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{\sqrt{(-3)^2+4^2+(-2)^2}}$$

$$= \frac{-3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}}{\sqrt{29}}$$

$$= -\frac{3}{\sqrt{29}}\mathbf{i} + \frac{4}{\sqrt{29}}\mathbf{j} - \frac{2}{\sqrt{29}}\mathbf{k}$$

மாதிரிக்கணக்கு (4)

ஒரு முக்கோண உச்சிகளின் நிலை வெக்டர்கள்

$$a_r\mathbf{i} + b_r\mathbf{j} + c_r\mathbf{k} \ (r = 1, 2, 3)$$

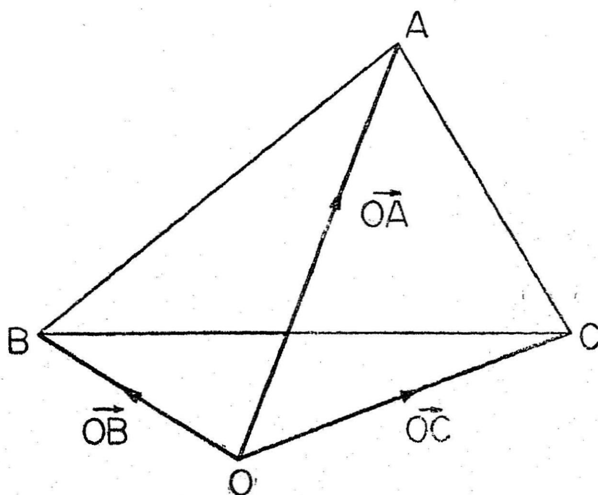
என்றால், அதன் பக்கங்களைக் குறிக்கும் வெக்டர்கள் யாவை? அவற்றின் தி. கொ.-களைக் காண்க. அந்த முக்கோணத்தின் பரிதியையும் காண்க.

முக்கோணத்தின் உச்சிகளை A, B, C என்று குறிப்போம்.

O என்பது ஆதியானால், $\overrightarrow{OA} = a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + c_1\mathbf{k}$;

$\overrightarrow{OB} = a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + c_2\mathbf{k}$; $\overrightarrow{OC} = a_3\mathbf{i} + b_3\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$

முக்கோணத்தின் பக்கங்களைக் குறிக்கும் வெக்டர்கள் $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CA}$ ஆகும்.



படம்-16.

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (a_2-a_1)\ \mathbf{i} + (b_2-b_1)\ \mathbf{j} + (c_2-c_1)\mathbf{k}$$

$$\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB} = (a_3-a_2)\ \mathbf{i} + (b_3-b_2)\mathbf{j} + (c_3-c_2)\mathbf{k}$$

$$\vec{CA} = \vec{OA} - \vec{OC} = (a_1-a_3)\ \mathbf{i} + (b_1-b_3)\ \mathbf{j} + (c_1-c_3)\mathbf{k}$$

AB-ன் நீளம் $= \left|\vec{AB}\right|$

$$= \sqrt{(a_2-a_1)^2 + (b_2-b_1)^2 + (c_2-c_1)^2}$$

இதேபோல், BC, CA ஆகியவற்றின் நீளங்களைக் காணலாம்.

ABC-ன் பரிதி $= \sqrt{(a_2-a_1)^2 + (b_2-b_1)^2 + (c_2-c_1)^2}$

$$+ \sqrt{(a_3-a_2)^2 + (b_3-b_2)^2 + (c_3-c_2)^2}$$

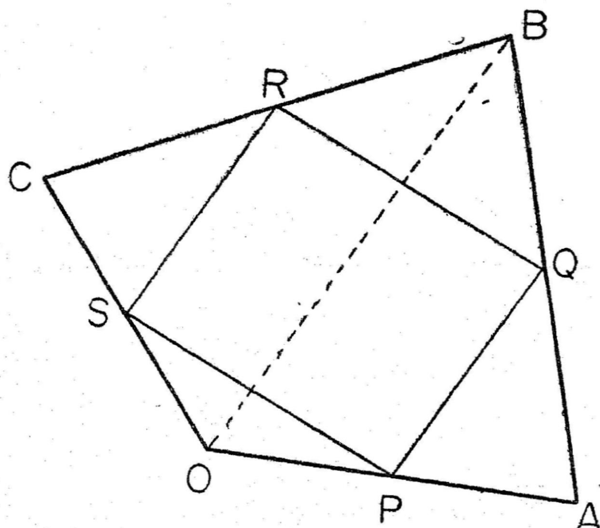
$$+ \sqrt{(a_1-a_3)^2 + (b_1-b_3)^2 + (c_1-c_3)^2}$$

AB-ன் தி. கொ. $\left(\dfrac{a_2-a_1}{|\vec{AB}|}, \dfrac{b_2-b_1}{|\vec{AB}|}, \dfrac{c_2-c_1}{|\vec{AB}|}\right)$

அவ்வாறே, BC, CA ஆகியவற்றின் தி. கொ.-களைக் காணலாம்.
[§ 10 குறிப்பு (3)]

மாதிரிக்கணக்கு (5)

ஒரு நாற்கரப் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளை வரிசையாக எடுத்துக் கொண்டால் அவை ஒரு இணைகரத்தின் உச்சிகளாகும் என நிறுவுக.



படம்-17.

OABC என்ற நாற்கரத்தில் *P*, *Q*, *R*, *S* ஆகியவை முறையே *CA*, *AB*, *BC*, *CO* ஆகிய பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் என்போம். *O*-வை ஆதியாகக் கொண்டு *A*, *B*, *C*-களின் நிலைவெக்டர்கள் முறையே **a**, **b**, **c** எனக் கொள்ளின்,

$$\vec{OP} = \tfrac{1}{2}\mathbf{a}; \quad \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$$

$$\therefore \quad \vec{AQ} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

எனவே, $OQ = OA + AQ = \mathbf{a} + \tfrac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$

$$\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB} = \mathbf{c} - \mathbf{b} \qquad \therefore \quad BR = \tfrac{1}{2}(\mathbf{c} - \mathbf{b})$$

$$\therefore \quad \vec{OR} = \vec{OB} + \vec{BR} = \mathbf{b} + \tfrac{1}{2}(\mathbf{c} - \mathbf{b}) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c})$$

மேலும், $\vec{OS} = \tfrac{1}{2}\mathbf{c}$

இப்போது, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - \frac{1}{2}\mathbf{a} = \frac{1}{2}\mathbf{b}$

$\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OS} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) - \frac{1}{2}\mathbf{c} = \frac{1}{2}\mathbf{b}$

$\therefore$ PQ-ம், SR-ம் இணையாகவும் சமமாகவும், உள்ளன. இவ்வாறே, QR-ம், PS-ம் இணையாகவும் சமமாகவும் உள்ளன நிறுவலாம்.

$\therefore$ $PQ\ RS$ என்பது ஒரு இணைகரம் ஆகும்.

மாதிரிக்கணக்கு (6)

$5\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$. $7\,\mathbf{i} - 8\,\mathbf{j} + 9\,\mathbf{k}$, $3\,\mathbf{i} + 20\,\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

ஆகிய 3 வெக்டர்கள் ஒரே தளத்தில் அமைந்துள்ளன என நிறுவுக.

கொடுத்துள்ள மூன்று வெக்டர்களும் ஒரே தளத்தில் அமைந்தால், ஒரு வெக்டர் மற்ற இரண்டின் ஒருபடித் தொடர்புடையதாக இருக்கவேண்டும்.

அதாவது, $5\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} + 7\,\mathbf{k} = x\,(7\,\mathbf{i} - 8\,\mathbf{j} + 9\mathbf{k}) + y\,(3\,\mathbf{i} + 20\,\mathbf{j} + 5\mathbf{k})$

$$\therefore \quad 7\,x + 3y = 5$$

$$-8\,x - 20y = 6$$

$$9\,x + 5y = 7$$

என்ற மூன்று சமன்பாடுகளும் ஒரே தீர்வுத் தொகுதியைக் (unique solution set) கொண்டதாக இருக்கவேண்டும்.

முதல் இரண்டு சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணில்

$$x = \frac{1}{2} = y$$

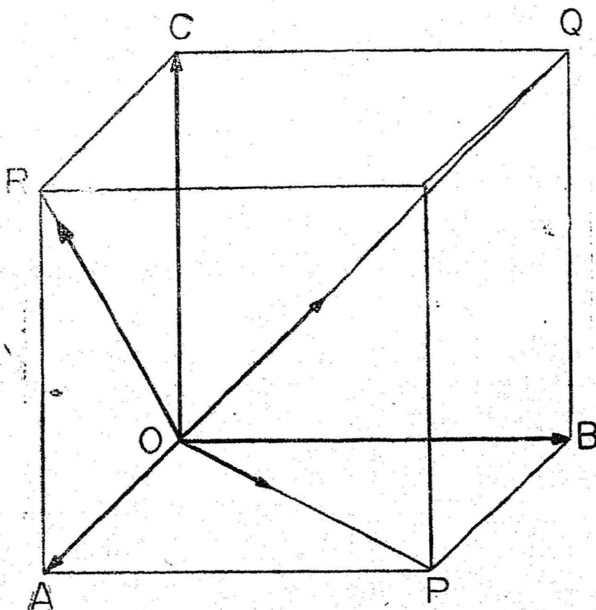
இவற்றை மூன்றுவது சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டால், $\frac{9}{2} + \frac{5}{2} = 7$ (சமனடைகிறது)

எனவே, இந்த மூன்று சமன்பாடுகளும் $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ என்னும் ஒரே தீர்வுத் தொகுதியைக் கொண்டிருக்கின்றன.

அதாவது, கொடுத்துள்ள மூன்று வெக்டர்களும் ஒரே தளத்தில் அமைந்துள்ளன.

மாதிரிக்கணக்கு (7)

ஒரு கன சதுரத்தின் (cube) $OAPB$, $OBQC$, $OARC$ என்னும் மூன்று முகங்கள் (faces) O-வில் சந்திக்கின்றன.



படம்-18.

O-வில் உள்ள ஒரு துகளின் (particle) மேல் மேற்கூறிய முகங்களின் மூலைவிட்டங்களாகிய OP, OQ, OR திசைகளில் முறையே 1, 2, 3 அலகுகள் உள்ள விசைகள் செயல்படுகின்றன அந்த விசைகளின் தொகுபயனின் பெறுமானம் திசையும் காண்க.

கன சதுரத்தின் பக்கம் அலகு நீளமுடையதாக எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad \vec{OA} = \mathbf{i}, \quad \vec{OB} = \mathbf{j}, \quad \vec{OC} = \mathbf{k}$$

$$\therefore \quad \vec{OP} = \mathbf{i}+\mathbf{j} \ ; \quad \vec{OQ} = \mathbf{j} + \mathbf{k} \ ; \quad \vec{OR} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\therefore \quad \vec{OP}\text{-ன் அலகு வெக்டர்} = \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{2}} = \hat{\mathbf{F}}_1 \text{ என்க.}$$

$\overrightarrow{OQ}$-ன் அலகு வெக்டர் $= \dfrac{\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{2}} = \hat{\mathbf{F}}_2$ என்க.

$\overrightarrow{OR}$-ன் அலகு வெக்டர் $= \dfrac{\mathbf{k}+\mathbf{i}}{\sqrt{2}} = \hat{\mathbf{F}}_3$ என்க.

கணக்குப்படி $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}$ ஆகியவற்றின் திசைகளில் செயல்படும் விசை வெக்டர்கள் முறையே $\hat{\mathbf{F}}_1,\ 2\hat{\mathbf{F}}_2,\ 3\hat{\mathbf{F}}_3$

∴ இந்த வெக்டர்களின் தொகுபயன் வெக்டர்

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{F}}_1 + 2\hat{\mathbf{F}}_2 + 3\hat{\mathbf{F}}_3$$

$$= \frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}}{\sqrt{2}} + \frac{2(\mathbf{j}+\mathbf{k})}{\sqrt{2}} + \frac{3(\mathbf{k}+\mathbf{j})}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{4\mathbf{i}}{\sqrt{2}} + \frac{3\mathbf{j}}{\sqrt{2}} + \frac{5\mathbf{k}}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore |\mathbf{F}| = \sqrt{\frac{16}{2} + \frac{9}{2} + \frac{25}{2}} = 5 \text{ அலகு}$$

$$\mathbf{F}\text{-ன் தி. கொ. } \frac{\frac{4}{\sqrt{2}}}{|\mathbf{F}|},\ \frac{\frac{3}{\sqrt{2}}}{|\mathbf{F}|},\ \frac{\frac{5}{\sqrt{1}}}{|\mathbf{F}|}$$

$$\text{அதாவது, } \left(\frac{4}{5\sqrt{2}},\ \frac{3}{5\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

பயிற்சி—1.

இரு புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர்கள் முறையே $\mathbf{i}+3\mathbf{j}-7\mathbf{k}$, $5\mathbf{i}-2\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ என்றால் அந்தப் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டைக் குறிக்கும் வெக்டர் யாது? அதன் நீளம் தி. கொ. காண்க.

(2) ஒரு முக்கோண உச்சிகளின் நிலை வெக்டர்கள் முறையே $\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $3\mathbf{i}-4\mathbf{j}+5\mathbf{k}$, $-2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+7\mathbf{k}$ என்றால் அந்த முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளம், தி. கொ. காண்க.

(3) $a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$, $b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$ ஆகிய மூவக்டர்கள் இணையாக இருப்பதற்கான நிபந்தனை யாது?

(4) $3\mathbf{i}-7\mathbf{j}-4\mathbf{k}$, $3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ ஆகிய மூன்று வெக்டர்கள் ஒரே தளத்தில் அமைந்துள்ளன என நிறுவுக.

(5) $\mathbf{A}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{B}=\mathbf{i}+3\mathbf{j}-2\mathbf{k}$, $\mathbf{C}=-2\mathbf{i}+\mathbf{j}-3\mathbf{k}$ $\mathbf{D}=3\mathbf{i}+3\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ ஆகிய நான்கு வெக்டர்களில் எந்த ஒரு வெக்டரும் மற்ற மூன்றின் ஒருபடிச் சேர்மானத்தால் கிடைக்கும் என்று நிறுவுக. ஆனால் எந்த ஒரு வெக்டரும் மற்ற ஏதவேது இரண்டு வெக்டர்களின் ஒருபடிச் சேர்மானமாகக் கிடைக்காது என்றும் நிறுவுக. இந்த நான்கு வெக்டர்களைப் பற்றி அறிவது என்ன?

இந்த வினாவை எவ்வாறு பொதுமைப்படுத்தலாம்?

(6) ஒரு வானவூர்தி 200 கிமீ. நேர்மேற்கில் பயணம் செய்து பின்பு மேற்குத் திசையிலிருந்து 60° வடப்பக்கம் 150 கிமீ. பயணம் செய்தால், அதன் தொகுபயன் இடப்பெயர்ச்சி (resultant displacement) எந்த திசையில் எவ்வளவு எனக் கணக்கிடுக.

(7) $\mathbf{A}=3\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$, $\mathbf{B}=-\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$, $\mathbf{C}=4\mathbf{i}-2\mathbf{j}-6\mathbf{k}$ ஆகிய வெகடர்கள் ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் என நிறுவுக.

(8) $\mathbf{F}_1=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-5\mathbf{k}$, $\mathbf{F}_2=-5\mathbf{i}+\mathbf{j}+3\mathbf{k}$,
$\mathbf{F}_3=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+4\mathbf{k}$, $\mathbf{F}_4=5\mathbf{i}-3\mathbf{j}-2\mathbf{k}$

ஆகிய நான்கு விசைகளின் தொகுபயன் காண்க. அதன் பெருமானம் மற்றும் திசை ஆகியவற்றைத் குறிப்பிடுக.

(9) $OAPB$, $OBQC$, $OARC$ என்ற ஒரு கனசதுர முகங்களின் மூலைவிட்டங்கள் முறையே $\vec{OP}$, $\vec{OQ}$, $\vec{OR}$ ஆகும்.

இந்த மூலைவிட்ட வெக்டர்களின் தொகுபயன் O வழியாகச் செல்லும், கன சதுர மூலைவிட்டம் $\vec{OS}$-ன் இரு மடங்குக்குச் சமமாகும் என்று நிறுவுக.

(10) $l\cdot\vec{OA}$, $m\cdot\vec{OB}$ ஆகிய விசைகள் (l, m எண்ணிகள்) O என்ற புள்ளியில் உள்ள துகள்மேல் செயல்படுகின்றன. C என்ற புள்ளி நேர்கோடு AB ஐ $m:l$ என்ற உள் விகிதத்தில் பிரிக்கட்டும் கொடுத்துள்ள விசைகளின் தொகுபயன் $(l+m)\ \vec{OC}$ என்று காண்பிக்கவும்.

(11) $ABCD$ என்ற நாற்கரத்தின் எதிர்ப் பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடுகள் E என்ற புள்ளியில் சந்திக்கின்றன. O என்பது அந்த நாற்கரத்தின் ஏதாவதொரு புள்ளி என்றால் $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = 4\,\vec{OE}$ என நிறுவுக.

(12) $ABCD$ என்ற நாற்கரத்தின் AC, BD என்ற பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே E, F ஆகும். A என்ற புள்ளியில் $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ என்னும் விசைகளும், C என்ற புள்ளியில் $\vec{CB}$, $\vec{CD}$ என்ற விசைகளும் செயல்பட்டால், அவற்றின் தொகுபயன் $4\,EF$ என நிறுவுக.

(13) $ABCD$ என்ற நாற்கரத்தின் $A(-1, -2, 2)$, $B(3, 2, -1)$, $C(1, -2, 4)$, $D(3, 1, 2)$ என்ற உச்சிகளில் முறையே திணிவு 1, 2, 3, 4 அலகுகள் உள்ள துகள்கள் இருந்தால், அவைகளின் திணிவு மையம் காண்க.

விடைகள்

(1) வெக்டர் $= 4i - 5j + 11k$;

நீளம் $= 9\sqrt{2}$; $\left(\frac{4}{9\sqrt{2}}, \frac{-5}{9\sqrt{2}}, \frac{11}{9\sqrt{2}}\right)$

(2) $\sqrt{78}, \left(\frac{-5}{\sqrt{78}}, \frac{7}{\sqrt{78}}, \frac{2}{\sqrt{78}}\right)$;

$\sqrt{26}, \left(\frac{3}{\sqrt{26}}, \frac{-1}{\sqrt{26}}, \frac{-4}{\sqrt{26}}\right)$;

$\sqrt{44}, \left(\frac{2}{\sqrt{44}}, \frac{-6}{\sqrt{44}}, \frac{2}{\sqrt{44}}\right)$

(3) $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$

(5) $n\,(n \geqslant 4)$ வெக்டர்களில் எந்த மூன்று வெக்டர்களும் ஒரு தளத்தில் அமையாதிருந்தால் அந்த n வெக்டர்களும் ஒருபடித் தொடர்புடையன ஆனால் $n < 4$ என்றால், அந்த n வெக்டர்கள் ஒருபடித் தொடர்பிலாதவை.

(6) $50\sqrt{37}$ கி.மீ. $\cos^{-1}\frac{11}{2\sqrt{37}}$ N. of W.

(8) $2i - j$; $\sqrt{5}$, தி. வி. $(2, -1, 0)$

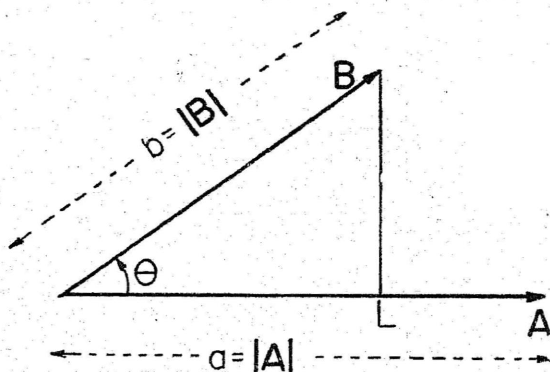
(13) $(2, 0, 2)$

2. இரு வெக்டர்களின் புள்ளிப் பெருக்கி, மற்றும் குறுக்குப் பெருக்கி

(The Dot and Cross Products of two Vectors)

§ 13. எண்ணிப் பெருக்கி அல்லது புள்ளிப் பெருக்கி (Scalar or Dot Product)

வரைவிலக்கணம் : A·B என்ற குறியீட்டால் குறிக்கப்படும். A, B ஆகிய இரு வெக்டர்களின் புள்ளிப் பெருக்கியானது A, B-களின் பெறுமானங்கள் (magnitudes) மற்றும் அந்த வெக்டர்களுக்கிடையே உள்ள கோணம் θ-ன் கொசைன் (cosine θ) ஆகிய மூன்று எண்ணிகளைப் பெருக்கி வந்த மதிப்புக்குச் சமம் ஆகும்.



படம்–19.

குறியீட்டு முறையில்,

A, B = $ab \cos\theta = |\mathbf{A}|\ |\mathbf{B}| \cos\theta$ என எழுதலாம்,

குறிப்பு (1): A·B என்பதை A புள்ளி B அல்லது A dot B அல்லது A, B-களின் புள்ளிப் பெருக்கி எனச் சொல்வது வழக்கம்.

(2) $\mathbf{A \cdot B}$ என்பதை இடையில் வரும் புள்ளியை நீக்கிவிட்டு **AB** என எழுதலாகாது. **AB** என்பது பொருளற்றது.

a, b ஆகிய எண்ணிகளுக்குப் புள்ளிப் பெருக்கம் கிடையாது; ஆதலால், a,b-ம், ab-ம் a, b-களின் சாதாரண பெருக்கலைக் குறிக்கும்.

(3) $\mathbf{B \cdot A} = ba \cos\theta = ab \cos\theta$ என்பதால்

$\mathbf{B \cdot A} = \mathbf{A \cdot B}$ ஆகும்.

அதாவது, இரு வெக்டர்களின் புள்ளிப் பெருக்கி பரிமாற்று விதிக்குட்பட்டது (Commutative law)

(4) $\mathbf{A \cdot (B + C)} = \mathbf{A \cdot B} + \mathbf{A \cdot C}$ (பங்கீட்டு விதி) (distributive law)

(5) $m(\mathbf{A \cdot B}) = (m\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} = \mathbf{A}\cdot(m\mathbf{B})$
$= (\mathbf{A \cdot B})\, m$ (m எண்ணி)

(6) $\mathbf{A \cdot B} = 0$ என்பது மூன்று வகைகளில் நேரிடலாம்.

(i) $\mathbf{A} = 0$ (ii) $\mathbf{B} = 0$ (iii) $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$

(7) இரண்டு சுழியல்லாத வெக்டர்கள் செங்குத்தாக இருப்பதற்கான நிபந்தனை, அவற்றின் புள்ளிப் பெருக்கி சுழியாக வேண்டும்.

$\mathbf{A \cdot B} = \mathbf{A \cdot C}$ மற்றும் $\mathbf{A} \neq 0$ எனில்,

$\mathbf{A \cdot (B - C)} - 0$

$\therefore$ $\mathbf{B - C} = 0$ அல்லது $\mathbf{A} \perp (\mathbf{B - C})$

எனவே, $\mathbf{A \cdot B} = \mathbf{A \cdot C}$ மற்றும் $\mathbf{A} \neq 0$ என்பதிலிருந்து $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ என்று தீர்மானித்துவிடக் கூடாது என்று அறிய வேண்டும்.

(8) $\mathbf{A \cdot A} = aa \cos\theta = a^2 = |\mathbf{A}|^2$

$\mathbf{A \cdot A}$ என்பதை $\mathbf{A}^2$ என்றும் சிலர் குறிப்பிடுவர்.

(9) **A, B** என்ற இரண்டு வெக்டர்களுக்கிடையே உள்ள கோணம் θ என்றால்,

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A.B}}{|\mathbf{A}|\ |\mathbf{B}|} = \frac{\mathbf{A \cdot B}}{ab} = \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{B}}$$

(10) படம்-19-ல் $OL = b\cos\theta$ = **A**-ன் மேல் **B**-ன் குத்துவீச்சு (orthogonal projection).

$\therefore$ $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = ab\cos\theta$ = A-ன் தனிப்பெறுமானமும் அதன் மேல் B-ன் குத்து வீச்சும் பெருக்கிவந்த மதிப்புக்குச் சமம். $\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{B}}$ = B-ன் திசையில் A-ன் பிரித்த பகுதி (resolved part) அல்லது குத்துவீச்சு.

(11) i, j, k ஆகிய (அடிப்படை) அலகு வெக்டர்கள் ஒன்றுக்கொன்று குத்தாக இருப்பதால்

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0 = \mathbf{j}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{i}\cdot\mathbf{k}$$

ஆனால், $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1 = \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2$

§ **14.** **குத்துக் கூறுகளில் அமைந்துள்ள இரண்டு வெக்டர்களின் புள்ளிப்பெருக்கி**

$$\mathbf{A} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{B} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$$

என்றால்,

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} &= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})\cdot(b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k})\\ &= a_1 b_1\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} + a_1 b_2\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} + a_1 b_3\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}\\ &+ a_2 b_1\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{i} + a_2 b_2\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{j} + a_2 b_3\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}\\ &+ a_3 b_1\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{i} + a_3 b_2\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{j} + a_3 b_3\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}\\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_2 b_3 \qquad \text{[§ 13 குறிப்பு 11]}\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$$

[குறிப்பு (1): $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{A}^2 = |\mathbf{A}|^2 = a^2$
$= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

(2) A, B-களுக்கு இடையே உள்ள கோணம் θ என்றால்,

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{ab} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

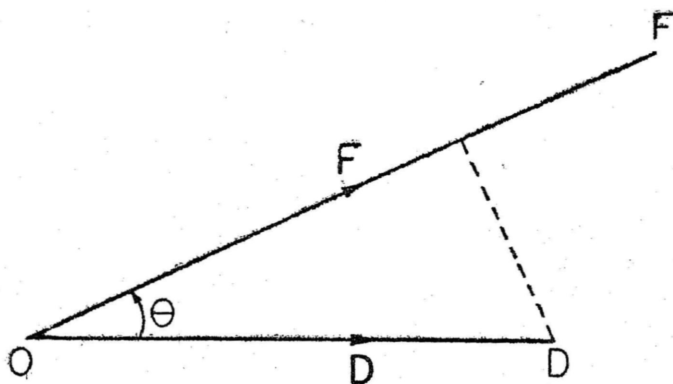
(3) $\mathbf{A} = a_1 i + a_2 j + a_3\mathbf{k}$

$$\therefore \mathbf{A}\cdot\mathbf{i} = n_1\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} + a_2\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{i} + a_3\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = a_1$$

இவ்வாறே, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{j} = a_2$; $\mathbf{A}\cdot\mathbf{k} = a_3$

$$\therefore \mathbf{A} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{i})\,\mathbf{i} + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{j})\,\mathbf{j} + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{k})\mathbf{k}]$$

§ 15. இயற்பியலில் (Physics) புள்ளிப் பெருக்கியின் பயன்



படம்-20.

$\vec{OF} = \mathbf{F}$, $\vec{OD} = \mathbf{D}$ என்பவை முறையே விசையையும், அதனால் செயல்படும் ஒரு படுபுள்ளி (point of application)-ன் இடப் பெயர்ச்சியையும் குறிக்கட்டும். விசையின் திசைக்கும் இடப்பெயர்ச்சியின் திசைக்கும் இடையில் உள்ள கோணத்தை θ என்போம். அந்த விசை செய்த வேலை (work) யானது, விசையின் தனிப் பெறுமானம் மற்றும் இடப்பெயர்ச்சியை விசைத் திசையில் பிரித்த பகுதி, ஆகிய இரண்டையும் பெருக்கி வந்த மதிப்புக்குச் சமம் என நாம் அறிவோம்.

ஆகவே, விசை செய்த வேலை $= f\,(d \cos\theta)$ [படம் (20)]

$$= fd \cos\theta$$
$$= \mathbf{F}\cdot\mathbf{D}$$

[குறிப்பு(1) : $\theta = 90^\circ$ எனில், இடப் பெயர்ச்சி திசையும் விசைத்திசையும் செங்குத்து ஆகும்.

$$\therefore \quad \mathbf{F}\cdot\mathbf{D} = 0$$

அதாவது, ஒரு துகளின் இடப்பெயர்ச்சி திசை ஒரு விசைத் திசைக்குச் செங்குத்தாக இருந்தால், அந்த விசை அந்தத் துகள் மேல் செய்த வேலை சுழி என்று தெளிவாகிறது.

(2) $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$; $\mathbf{D} = d_1\mathbf{i} + d_2\mathbf{j} + d_3\mathbf{k}$

எனில், $\mathbf{F}\cdot\mathbf{D} = F_1 d_1 + F_2 d_2 + F_3 d_3$

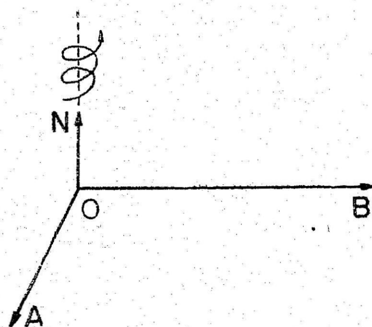
இதிலிருந்து பின்வரும் கோட்பாடு அறியப்படும். 'ஒரு விசை செய்த (மொத்த) வேலையானது அந்த விசையின் மூன்று குத்துக் கூறுகள் செய்த வேலைகளின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமம்'.]

§ 16. வெக்டர் குறுக்குப் பெருக்கி (Vector cross product)

A, **B** என்ற இரு வெக்டர்களின் வெக்டர் குறுக்குப் பெருக்கியானது, **C** என்ற மற்ரொரு வெக்டர் ஆகும். இது $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ என குறிக்கப்படும். இந்த வெக்டர் **C**-ன் (தனிப்) பெறுமானம்: **A**, **B**-களின் பெறுமானங்கள் மற்றும் அந்த வெக்டர்களுக்கு இடையில் உள்ள கோணம் $\theta\,(\leq 180°)$ வின் சைன் மதிப்பு ஆகிய மூன்று எண்ணிகளைப் பெருக்கிவந்த மதிப்புக்குச் சமம் ஆகும்.

C-ன் திசை **A**, **B** ஆகிய இரண்டிற்கும் செங்குத்தாகவும் அதே சமயத்தில் வட்டவரிசையில் **A**, **B**, **C** என்பவை வலக்கை வெக்டர் தொகுதியாக இருக்கும்படியும் அமைய வேண்டும்.

குறியீட்டு முறையில் பின்வருமாறு விளக்கலாம். **A**, **B** ஆகிய இரண்டு வெக்டர்களுக்கும் செங்குத்தாகவும், **A**, **B**, **N** வரிசையில் வலக்கை வெக்டர் தொகுதியாகவும் அமையும் அலகு வெக்டரை **N** என்று குறிப்போம் [படம் (21)].



படம்-21.

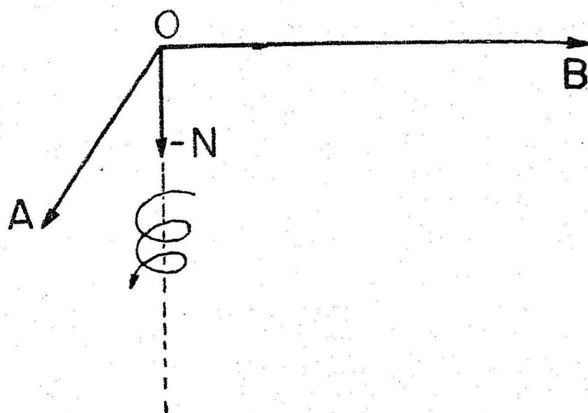
A, **B** வெக்டர் திசைகளுக்கு இடையில் உள்ள கோணம் $\theta\,(\leq 180°)$ எனில்,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (ab \sin\theta)\,\mathbf{N} \qquad (\theta \leq 180°)$$
$$= (\,|\mathbf{A}|\;\; |\mathbf{B}| \sin\theta)\,\mathbf{N}$$

[குறிப்பு (1): **A**×**B** என்பதை **A** வெக்டர் பெருக்கல் **B**, அல்லது *A* cross *B*, அல்லது **A**, **B**-களின் குறுக்குப் பெருக்கி எனக் கூறுவது வழக்கம். **A**×**B** என்பது ஒரு வெக்டர் என்று நினைவில் கொள்வது இன்றியமையாதது.

(2) **A**×**B** என்பதில், இடையில் வரும் × அடையாளத்தை நீக்கிவிட்டு எழுதலாகாது.

a, *b* ஆகிய எண்ணிகளுக்கு வெக்டர் பெருக்கி இல்லையாதலால், $a \times b$-ம் ab-ம் a, b-களின் சாதாரண பெருக்கலையே குறிக்கும்.



படம்-22.

(3) மேலே விளக்கிய **A**, **B**, **N** ஆகிய வெக்டர்கள் இந்த வரிசையில் வலக்கைத் தொகுதி என்றால், **B**, **A**, −**N** ஆகிய வெக்டர்கள் இந்த வரிசையில் வலக்கைத் தொகுதியென்று படம்-22 மூலம் தெளிவாகும்.

$$\therefore \quad \mathbf{B}\times\mathbf{A} = (ba \sin\theta)(-\mathbf{N})$$
$$= -(ab \sin\theta)\,\mathbf{N}$$
$$= -\,\mathbf{A}\times\mathbf{B}$$

அதாவது, $\boxed{\mathbf{B}\times\mathbf{A} = -\,\mathbf{A}\times\mathbf{B}}$

எனவே, வெக்டர் குறுக்குப் பெருக்கி பரிமாற்று விதிக்கு உட்பட்டதல்ல.

(4) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$ (பங்கீட்டு விதி)

(5) $m(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (m\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (m\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})m$

(6) $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$ என்பது கீழ்வரும் மூன்று வகைகளில் நேரிடலாம்.

(i) $\mathbf{A} = 0$ (அதாவது, $a = 0$)

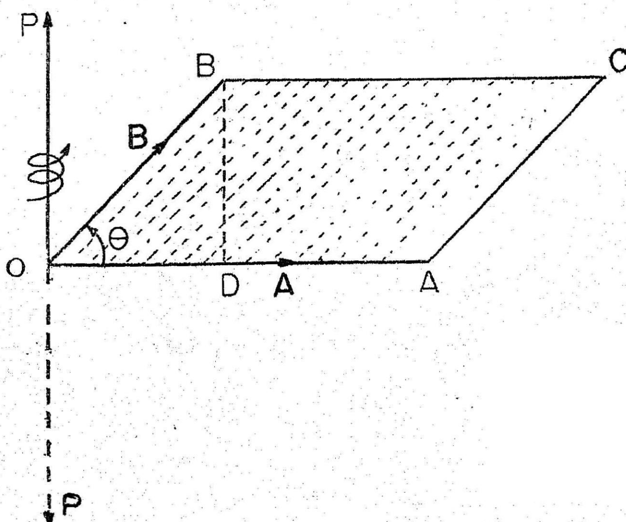
(ii) $\mathbf{B} = 0$ (அதாவது, $b = 0$)

(iii) $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ அல்லது $\mathbf{A}$-ம் $\mathbf{B}$-ம் இணை (அதாவது, $\theta = 0$)

எனவே, இரண்டு சுழியல்லாத வெவ்வேறான வெக்டர்கள் இணையாக இருப்பதற்கான நிபந்தனை: அவற்றின் குறுக்குப் பெருக்கி சுழி வெக்டராக இருக்க வேண்டும்.

(7) $\mathbf{A}$ என்பது ஏதாவதொரு வெக்டர் என்றால், $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0$.

(8) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ என்பதற்குக் கீழ்க்கண்ட வடிவ கணிதக் குறிப்பு (geometrical representations) உண்டு.



படம்–23.

$\overrightarrow{OA} = \mathbf{A}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{B}$ எனக் குறிப்போம். $OACB$ என்ற இணைகரத்தில் OA-க்கு $\perp$ ஆக BD வரைக.

இணைகரம் $OACB$-ன் பரப்பு

$$= OA \cdot BD$$
$$= OA \cdot OB \sin\theta$$
$$= a\,(b \sin\theta)$$
$$= ab \sin\theta$$
$$= |\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$$

அதாவது, இரண்டு வெக்டர்களின் வெக்டர் பெருக்கியின் பெறுமானம் அந்த வெக்டர்களை அடுத்துள்ள பக்கங்களாகக் கொண்ட இணைகரத்தின் பரப்பின் மதிப்புக்குச் சமம் ஆகும்.

$OACB$ என்ற இணைகரத்திற்கு $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OP'}$ என்ற இரு செங்குத்துத் திசைகள் உள்ளன. ஒரு வலக்கைத் திருகாணியை POP' வுடன் பொருத்தி வைத்து OAB என்ற வரிசை குறிக்கும் போக்கில் (sense) சுழற்றினால் அந்தத் திருகாணி $\overrightarrow{OP}$ திசையில் முன்னேறும். ஆகவே, $OACB$ என்ற வரிசை குறிக்கும் போக்கில் எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட இணைகரத்தின் நேர் செங்குத்துத் திசையை (positive normal direction) $\overrightarrow{OP}$ என்றும், $OBCA$ என்ற வரிசை குறிக்கும் போக்கில் எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட இணைகரத்தின் நேர் செங்குத்துத் திசையை $\overrightarrow{OP'}$ என்றும் எடுத்துக்கொள்வது மரபு.

எனவே, வெக்டர் பரப்பு $OACB$ = − வெக்டர் பரப்பு $OBCA$

$\therefore$ $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ = இணைகரம் $OACB$-ன் வெக்டர் பரப்பு

$\mathbf{B}\times\mathbf{A}$ = இணைகரம் $OBCA$-ன் வெக்டர் பரப்பு

(9) $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \mathbf{A}\times\mathbf{C}$ மற்றும் $\mathbf{A} \neq 0$ என்றால், $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ என்று முடிவுகட்டிவிட இயலாது.

ஏனெனில், கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} - \mathbf{C}) = 0$ என எழுதலாம்.

$\mathbf{A} \neq 0$ என்பதால், $\mathbf{B} - \mathbf{C} = 0$ அல்லது $\mathbf{B} - \mathbf{C}$ என்ற வெக்டர் A-க்கு இணையாகும்.

அதாவது, $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ அல்லது $\mathbf{B} = \mathbf{C} + k\mathbf{A}$ (k எண்ணி)

$$(10)\quad \mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k};\quad \mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k}$$
$$\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i};\quad \mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i}$$
$$\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j};\quad \mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j}$$

$$(11)\quad \mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times k=0$$

(12) வெக்டர் குறுக்குப் பெருக்கியைச் சுருக்கமாக "குறுக்குப் பெருக்கி" அல்லது "வெக்டர் பெருக்கி" என்று இனி குறிப்பிடுவோம்.

§ 17. வெக்டர் குறுக்குப் பெருக்கியின் குத்துக் கூறுகள்

$$\mathbf{A}=a_1\,\mathbf{i}+a_2\,\mathbf{j}+a_3\,\mathbf{k};\qquad \mathbf{B}=b_2\,\mathbf{i}+b_2\,\mathbf{j}+b_3\,\mathbf{k}$$

என்றால்,

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\times\mathbf{B} &= (a_1\,\mathbf{i}+a_2\,\mathbf{j}+a_3\,\mathbf{k})\times(b_1\,\mathbf{i}+b_2\,\mathbf{j}+b_3\,\mathbf{k})\\
&= a_1 b_1\,\mathbf{i}\times\mathbf{i}+a_1 b_2\,\mathbf{i}\times\mathbf{j}+a_1 b_3\,\mathbf{i}\times\mathbf{k}\\
&\quad \times a_2 b_1\,\mathbf{j}\times\mathbf{i}+a_2 b_2\,\mathbf{j}\times\mathbf{j}+a_2 b_3\,\mathbf{j}\times\mathbf{k}\\
&\quad \times a_3 b_1\,\mathbf{k}\times\mathbf{i}+a_3 b_2\,\mathbf{k}\times\mathbf{j}+a_3 b_3\,\mathbf{k}\times\mathbf{k}\\
&= a_1 b_2\,\mathbf{k}-a_1 b_3\,\mathbf{j}\\
&\quad -a_2 b_1\,\mathbf{k}+a_2 b_3\,\mathbf{i}\\
&\quad +a_3 b_1\,\mathbf{j}-a_3 b_1\,\mathbf{i} \qquad [\S\ 14\ \text{குறிப்பு}\ (9)]\\
&= (a_2 b_3-a_3 b_2)\,\mathbf{i}+(a_3 b_1-a_1 b_2)\,\mathbf{j}\\
&\qquad +(a_1 b_2-a_2 b_1)\,\mathbf{k}
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \mathbf{A}\times\mathbf{B}=\sum(a_2 b_3-a_3 b_2)\,\mathbf{i}$$

இதையே பின்வரும் அணிகோவை முறையில்

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

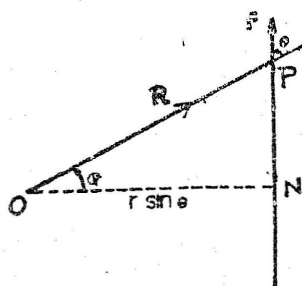
என எழுதலாம்.

§ 18. இயற்பியலில் வெக்டர் குறுக்குப் பெருக்கியின் பயன்

§ 18·1. ஒரு விசையின் திருப்புத்திறன் (moment) அல்லது முறுக்குத் திறன் (torque)

F என்னும் விசை செயல்படும் கோட்டில் (line of action) *P* ஏதாவதொரு புள்ளி என்க. கொடுத்துள்ள *O* என்ற புள்ளியைப் பொறுத்து **F**-ன் திருப்புத்திறன் காண்போம்.

F-க்கு $\perp$ ஆக ON வரைக. $\overrightarrow{OP} = \mathbf{R}$, $|\mathbf{R}| = r$, $|\mathbf{F}| = f$ எனக் கொண்டால்,



படம்-24.

படம் 24-லிருந்து, O-வைக் குறித்து F-ன் திருப்புத்திறன் (இடஞ்சுழி திசையில்)

$$= (r \sin \theta) f = |\mathbf{R} \times \mathbf{F}|$$

ஆகவே, F-ன் திருப்புத்திறனை M என்ற ஒரு வெக்டரால் குறிப்பிடப்படின்,

$$\mathbf{M} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}$$

M-ன் திசை $\mathbf{R} \times \mathbf{F}$-ன் திசையாகும்.

அதாவது, R, F-களுக்குச் செங்குத்தாகவும், R, M, F வலக்கை வெக்டர் தொகுதியாகவும் இருக்க வேண்டும்.

[குறிப்பு (1): P வழியாகச் செல்லும் $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots \mathbf{F}_n$ ஆகிய n வெக்டர்களின் தொகுதி பயன் வெக்டர் F என்றால்

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n$$

$$\therefore \quad \mathbf{R} \times \mathbf{F} = \mathbf{R} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n)$$
$$= \mathbf{R} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{R} \times \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{R} \times \mathbf{F}_n$$

இதையே பக்கம் மாற்றி எழுதினால்

$$\mathbf{R} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{R} \times \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{R} \times \mathbf{F}_n = \mathbf{R} \times \mathbf{F}$$

அதாவது, O-வைக் குறித்து $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2 \ldots \mathbf{F}_n$ ஆகிய தனித்தனி விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் வெக்டர் கூட்டுத் தொகையானது O-வைக் குறித்து அந்த விசைகளின் தொகுபயனுடைய திருப்புத்திறனுக்குச் சமமாகும்.

(2) $\mathbf{F} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$

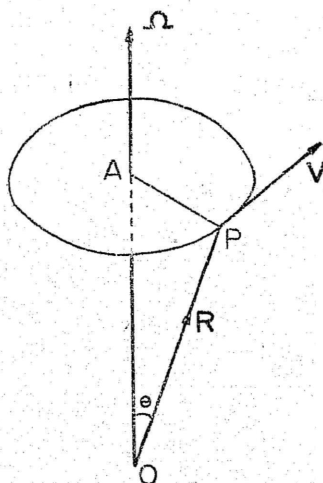
$\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

$$\mathbf{M} = \mathbf{R} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

$$= (yZ - zY)\,\mathbf{i} + (zX - xZ)\,\mathbf{j} + (xY - yX)\,\mathbf{k}$$

இதிலிருந்து, x —, y —, z — அச்சுகளைக் குறித்து F-ன் திருப்புத் திறன்களின் பெறுமானங்கள் முறையே $yZ - zY$, $zX - xZ$, $xY - yX$ ஆகும் என்று அறிகிறோம்.]

§ **18·2.** ஒரு நிலையான அச்சைப் பற்றிச் சுழலும் ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் (rigid body) திசைவேகமும் கோணத் திசை வேகமும் (Velocity and Angular velocity)



படம்-25.

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருள் நிலையான அச்சைப் (fixed axis) பற்றி ω ஆரையன்/விநாடி என்ற கோணத் திசை வேகத்தில் சுழலுவதாக வைத்துக் கொள்வோம், Ω என்ற மாறு வெக்டரின் பெறுமானம் ω ஆகவும் அதன் திசை நிலையச்சின் திசையாகவும் எடுத்துக் கொள்வோம். ஒரு வலக்கைத் திருகாணியை மேற்

கூறிய அச்சில் பொருத்தி, அந்தக் கட்டிறுக்கப் பொருள் சுழலும் திசையில் சுழற்றினுல் திருகாணி எந்தத் திசையில் முன்னேறுகிறதோ அந்தத் திசையை Ω-வின் நேர்த்திசையாகக் கொள்ள வேண்டும்.

அக் கட்டிறுக்கப் பொருளின் ஏதாவதொரு புள்ளியை P என்றும், அந்த அச்சில் உள்ள ஏதாவதொரு புள்ளியை O என்றும், $OP = \mathbf{R}$ என்றும், $|\mathbf{R}| = r$, என்றும், P-ன் திசைவேகத்தை $\mathbf{V}$ என்றும் எடுத்துக் கொள்வோம்.

இயக்கவியலிலி(Dynamics)ருந்து,

$$|\mathbf{V}| = \omega (AP) = \omega (r \sin \theta)$$
$$= |\Omega \times \mathbf{R}| \qquad \text{[படம் (25)]}$$

Ω, R, V ஆகிய வெக்டர்கள் வலக்கை வெக்டர் தொகுதி என்று படத்திலிருந்து தெளிவாகிறது.

மாதிரிக்கணக்கு (1)

$\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ என்பவை இரண்டு செங்குத்து வெக்டர்கள் என நிறுவுக. இவை இரண்டிற்கும் செங்குத்தான அலகு வெக்டர் காண்க.

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (3)(2) + (-2)(1) + (1)(-4) = 0$$

∴ A, B செங்குத்து வெக்டர்கள்.

$\mathbf{C} = c_1 \mathbf{i} + c_2 \mathbf{j} + c_3 \mathbf{k}$ என்ற வெக்டர் A, B ஆகிய இரண்டிற்கும் செங்குத்தாக உள்ள ஒரு வெக்டர் என்போம்.

∴ $\mathbf{C}\cdot\mathbf{A} = 0$ மேலும் $\mathbf{C}\cdot\mathbf{B} = 0$

அதாவது, $3c_1 - 2c_2 + c_3 = 0$

$$2c_1 + c_2 - 4c_3 = 0$$

$$\therefore \frac{c_1}{8-1} = \frac{c_2}{2+12} = \frac{c_3}{3+4}$$

அதாவது, $c_1 : c_2 : c_3 = 1 : 2 : 1$

$$\therefore \mathbf{C} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\therefore \hat{\mathbf{C}} = \frac{\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

மாற்றுவழி :

A, B ஆகிய இரண்டிற்கும் செங்குத்தான வெக்டர்

$$= \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 7\mathbf{i} + 14\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$$

$$\therefore \text{ அலகு செங்குத்து வெக்டர் } = \frac{7\mathbf{i} + 14\mathbf{j} + 7\mathbf{k}}{\sqrt{7^2+14^2+7^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k})$$

மாதிரிக்கணக்கு (2)

(அ) $\mathbf{A} = 3\mathbf{i}-6\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ என்ற வெக்டருக்கும் x—, y—, z— அச்சுகளுக்கும் இடையே உள்ள கோணங்களைக் காண்க.

(ஆ) $\mathbf{B} = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ என்றால் A, B-களுக்கு இடையே உள்ள கோணம் எவ்வளவு ?

(இ) B-ன் மேல் A-ன் குத்து வீச்சு காண்க.

(அ) கொடுத்துள்ள வெக்டர் A-க்கும் x—, y—, z— அச்சுகளுக்கும் இடையே உள்ள கோணங்கள் முறையே α, β, γ எனக் கொளின்,

$$\hat{\mathbf{A}} = \frac{3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{3^2+6^3+2^2}} = \frac{3}{7}\,\mathbf{i} - \frac{6}{7}\,\mathbf{j} + \frac{2}{7}\,\mathbf{k}$$

$$\therefore \cos\alpha = \hat{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{i} = \left(\frac{3}{7}\,\mathbf{i} - \frac{6}{7}\,\mathbf{j} + \frac{2}{7}\,\mathbf{k}\right)\cdot\mathbf{j} = \frac{3}{7}$$

இதுபோலவே, $\cos\beta = \hat{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{j} = -\frac{6}{7}$

$$\cos\gamma = \hat{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{k} = \frac{2}{7}$$

$$\therefore \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{3}{7}\right), \quad \beta = \cos^{-1}\left(-\frac{6}{7}\right)$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{2}{7}\right)$$

மாற்று வழி :

A-ன் தி. வி. (3, −6, 2)

$\therefore$ A-ன் தி. கொ. $\left(\dfrac{3}{|\mathbf{A}|}, \dfrac{-6}{|\mathbf{A}|}, \dfrac{2}{|\mathbf{A}|}\right)$

அதாவது, $\left(\dfrac{3}{7}, -\dfrac{6}{7}, \dfrac{2}{7}\right)$

$$\therefore \quad \cos\alpha = \frac{3}{7}, \quad \beta = -\frac{6}{7}, \quad \cos\gamma = \frac{2}{7}$$

(ஆ) $\hat{\mathbf{B}} = \dfrac{\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$

A, B-களுக்கிடையே உள்ள கோணம் $\theta°$ என்றால்,

$$\cos\theta = \hat{\mathbf{A}}\cdot\hat{\mathbf{B}}$$
$$= \frac{1}{7\sqrt{3}}(3\cdot1 - 6\cdot1 + 2\cdot1)$$
$$= -\frac{1}{7\sqrt{3}}$$
$$\therefore \quad \theta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{7\sqrt{3}}\right)$$

(இ) B-ன் மேல் A-ன் குத்துவீச்சு

$$= \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{B}} = (3i-6j+2k)\cdot\left(\frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{3}}\right)$$
$$= \frac{3-6+2}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

மாதிரிக்கணக்கு (3)

$\mathbf{F}_1 = 3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+4\mathbf{k}$, $\mathbf{F}_2 = 7\mathbf{i}+4\mathbf{j}-6\mathbf{k}$, $\mathbf{F}_3 = 2\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$ ஆகிய மூன்று விசைகள் ஒரு துகளை P (2, 4, 3) என்ற புள்ளியிலிருந்து Q (5, −6, −1) என்ற புள்ளிக்கு இடப்பெயர்ச்சி செயல்பட்டால் அந்த விசைகள் செய்த மொத்த வேலை எவ்வளவு ?

கொடுத்துள்ள விசைகளின் தொகுபயன் வெக்டர்

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = 12\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

O ஆதி எனில், $\overrightarrow{OP} = 2\mathbf{i} \times 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$,

$$\overrightarrow{OQ} = 5\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$\therefore$ இடப்பெயர்ச்சி வெக்டர் $\mathbf{D} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$

$$= 3\mathbf{i} - 10\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$

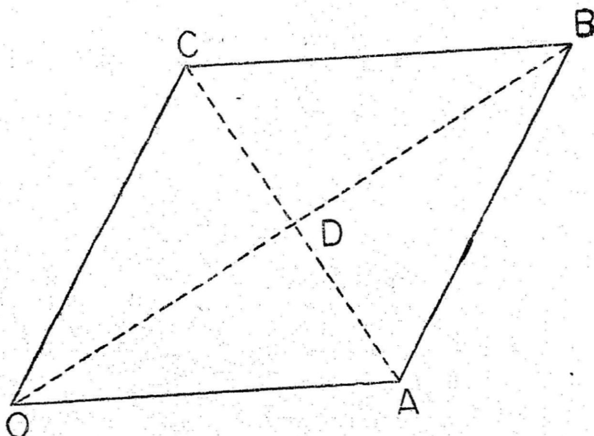
$\therefore$ மொத்த வேலை$=\mathbf{F}\cdot\mathbf{D} = (12\mathbf{i} \times \mathbf{j} - 3\mathbf{k})\cdot(3\mathbf{i}-10\mathbf{j}-4\mathbf{k})$

$= 36-10+12$

$= 38$ அலகு

மாதிரிக்கணக்கு (4)

ஒரு சாய் சதுரத்தின் (rhombus) மூலைவிட்டங்கள் செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்ளும் என நிறுவுக.



படம்-26.

$OABC$ என்ற சாய்சதுரத்தில் OB, AC என்ற மூலைவிட்டங்கள் D-ல் வெட்டட்டும்.

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB} = \mathbf{a}$, மற்றும் $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$ என்போம்.

இப்போது, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

$$\therefore \quad \vec{OB} \cdot \vec{AC} = (\mathbf{b} + \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

$$= \mathbf{b}^2 - \mathbf{a}^2 = |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 = |\vec{OC}|^2 - |\vec{OA}|^2$$

ஆனால், சாய்சதுரத்தில்

$$\therefore \quad |\vec{OC}| = |\vec{OA}|$$

$$\therefore \vec{OB} \cdot \vec{AC} = 0$$

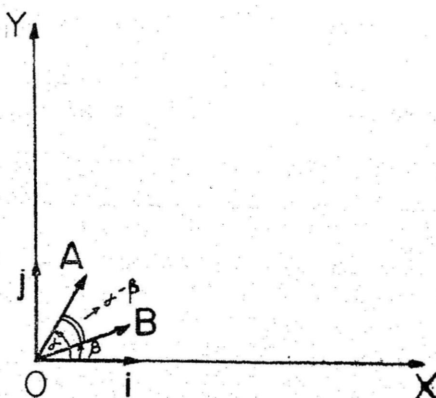
அதாவது, $\vec{OB} \perp \vec{AC}$

அதாவது, மூலைவிட்டங்கள் செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்கின்றன.

மாதிரிக்கணக்கு (5)

வெக்டர் முறையைப் பயன்படுத்தி

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$ என நிறுவுக.



படம்-27.

OX, OY ஆகிய செங்குத்து அச்சுகளில் முறையே **i**, **j** என்பவை அலகு வெக்டர்கள் என்போம். $\vec{OA} = \mathbf{a}$, $\vec{OB} = \mathbf{b}$ என்ற அலகு வெக்டர்கள் x-அச்சிலிருந்து முறையே α, β கோணங்களில் உள்ளன என்றும் கொள்வோம்.

$\therefore$ கோணம் $B\hat{O}A = \alpha \quad \beta$

OX-க்கு $\perp$ ஆக AP வரைக.

$\therefore \quad \vec{OA} = \vec{OP} + \vec{PA}$

$= (\,|\vec{OA}|\cos\alpha)\,\mathbf{i} + (\,|\vec{OA}|\sin\alpha)\,\mathbf{j}$

$= (1)(\cos\alpha)\,\mathbf{i} + (1)(\sin\alpha)\,\mathbf{j} \; (\therefore \quad |\vec{OA}| = 1)$

அதாவது, $\mathbf{a} = (\cos\alpha)\,\mathbf{i} + (\sin\alpha)\,\mathbf{j}$

இவ்வாறே, $\mathbf{b} = (\cos\beta)\,\mathbf{i} + (\sin\beta)\,\mathbf{j}$

இப்போது, $\cos(\alpha - \beta) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$

$= [(\cos\alpha)\,\mathbf{i} + (\sin\alpha)\,\mathbf{j}]\cdot[(\cos\beta)\,\mathbf{i} + (\sin\beta)\,\mathbf{j}]$

$= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \quad (\because \quad \mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1 \;\; \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = 0)$

$\therefore \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

மாதிரிக்கணக்கு (6)

$\mathbf{N}_0$ என்ற நிலையான வெக்டருக்குச் செங்குத்தாகவும், $\vec{OP_0} = \mathbf{R}_0$ என்ற வெக்டரின் முடிவுப்புள்ளி P_0 வழியாகவும் செல்கின்ற தளத்தின் சமன்பாட்டை வெக்டர் முறையில் காண்க.

$\mathbf{N}_0 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \quad \mathbf{R}_0 = \mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ என்றால் அந்தத் தளத்தின் சமன்பாட்டை ஆயத்தொலை வடிவமுறையில் எழுதுக.

$\vec{OP}$-ன் முடிவுப்புள்ளி P_0 வழியாகவும் $\mathbf{N}_0$ வெக்டருக்கு $\perp$ ஆகவும் உள்ள தளத்தில் அமைந்துள்ள ஏதாவதொரு புள்ளி P-ன் நிலை வெக்டர் $\vec{OP} = \mathbf{R}$ என்போம்.

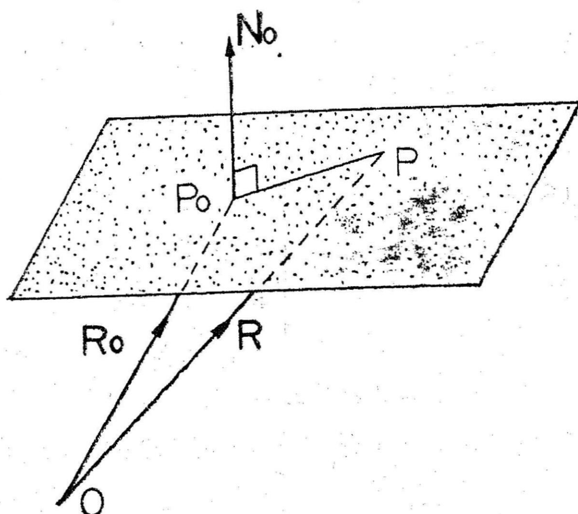
P_0, P என்ற புள்ளிகள் $\mathbf{N}_0$-க்குச் செங்குத்துத் தளத்தில் அமைந்திருப்பதால் $\vec{P_0P} \perp \mathbf{N}_0$ [படம் 28].

அதாவது, $\vec{OP} - \vec{OP_0} \perp \mathbf{N}_0$

அதாவது, $\mathbf{R} - \mathbf{R}_0 \perp \mathbf{N}_0$

$\therefore \quad (\mathbf{R} - \mathbf{R}_0)\cdot\mathbf{N}_0 = 0 \qquad \ldots \quad (1)$

இதுவே நமக்குத் தேவையான தளத்தின் வெக்டர் சமன்பாடு ஆகும்.



படம்-28.

$$\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad \text{எனில்,}$$

$$\mathbf{R} - \mathbf{R}_0 = (x-1)\mathbf{i} + (y-5)\mathbf{j} + (z-3)\mathbf{k}$$

வேண்டிய தளத்தின் சமன்பாடு $(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0)\cdot\mathbf{N}_0 = 0$

அதாவது, $2(x-1) + 3(y-5) + 6(z-3) = 0$

அல்லது, $2x + 3y + 6z = 3$

மாதிரிக்கணக்கு (7)

$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C}) + \mathbf{B}\times(\mathbf{C}+\mathbf{A}) + \mathbf{C}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = 0$ என நி

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\times\mathbf{B} + \mathbf{A}\times\mathbf{C} = \mathbf{A}\times\mathbf{B} - \mathbf{C}\times\mathbf{A}$$

$$\mathbf{B}\times(\mathbf{C}+\mathbf{A}) = \mathbf{B}\times\mathbf{C} + \mathbf{B}\times\mathbf{A} = \mathbf{B}\times\mathbf{C} - \mathbf{A}+\mathbf{B}$$

$$\mathbf{C}\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{C}\times\mathbf{A} + \mathbf{C}\times\mathbf{B} = \mathbf{C}\times\mathbf{A} - \mathbf{B}\times\mathbf{C}$$

$$\therefore \quad \mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C}) + \mathbf{B}\times(\mathbf{C}+\mathbf{A}) + \mathbf{C}\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = 0$$

மாதிரிக்கணக்கு (8)

$A = 2i - 3j - k$, $B = i + 4j - 2k$ என்றால் $(A-B) \times (A+B)$ காண்க. மேலும் இந்த இரண்டு வெக்டர்களும் செங்குத்தாக உள்ளன என்றும் நிறுவுக.

$$A - B = (2i - 3j - k) - (i + 4j - 2k)$$
$$= i - 7j + k$$
$$A + B = 3i + j - 3k$$

$$\therefore \quad (A-B) \times (A+B) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -7 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 20i + 6j + 22k$$

$= C$ என்போம்.

இப்போது, $A \cdot C = 2(20) + (-3)(6) + (-1)(22)$
$= 0$

மேலும், $B \cdot C = 1(20) + 4(6) + (-2)(22)$
$= 0$

$\therefore$ C என்ற வெக்டர் A, B ஆகிய இரண்டு வெக்டர்களுக்கும் செங்குத்தாக உள்ளது.

மாற்றுவழி :

$$(A-B) \times (A+B) = A \times (A+B) - B \times (A+B)$$
$$= A \times A + A \times B - B \times A - B \times B$$
$$= 0 + A \times B + A \times B - 0$$

$$\therefore \quad (A-B) \times (A+B) = 2(A \times B) \qquad \ldots (1)$$

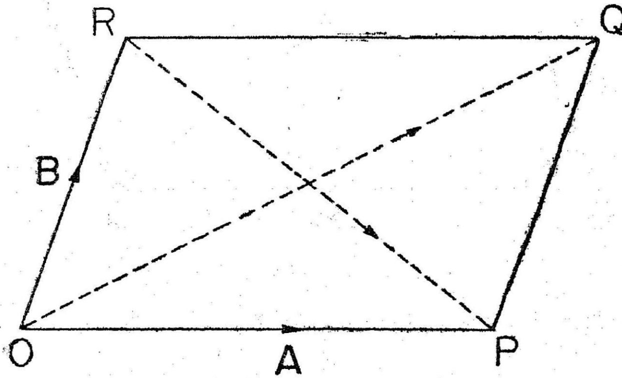
$$= 2\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2[i(6+4) - j(-4+1) + k(8+3)]$$
$$= 20i + 6j + 22k$$

$= C$ எனக் குறிப்போம்.

மேலும், $(\mathbf{A}-\mathbf{B}) \times (\mathbf{A}+\mathbf{B}) = 2(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ என்பதால் வரைவிலக்கணப்படி (§ 16), $(\mathbf{A}-\mathbf{B}) \times (\mathbf{A}+\mathbf{B})$ என்ற வெக்டர் **A, B** என்ற இரண்டு வெக்டர்களுக்கும் செங்குத்தாக அமைய வேண்டும்.

[குறிப்பு : $OPQR$ என்ற இணைகரத்தில் $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{PQ} = \mathbf{B}$ என்போம்.



படம்-29.

$$\text{மூலைவிட்டம் } \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \mathbf{A}+\mathbf{B}$$

$$\text{மூலைவிட்டம் } \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RO} + \overrightarrow{OP} = -\mathbf{B}+\mathbf{A} = \mathbf{A}-\mathbf{B}$$

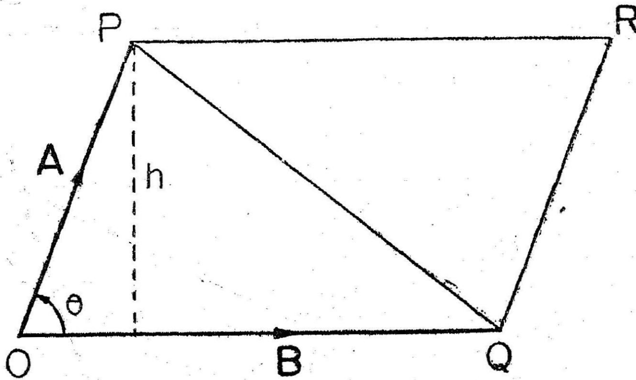
$\therefore$ $|(\mathbf{A}-\mathbf{B}) \times (\mathbf{A}+\mathbf{B})|$ என்பது $\overrightarrow{RP}$, $\overrightarrow{OQ}$ ஆகிய மூலைவிட்டங்களை அடுத்தடுத்த பக்கங்களாகக் கொண்ட இணைகரத்தின் பரப்பைக் குறிக்கும்.

ஆனால், $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|$ என்பது $OPQR$ என்ற இணைகரத்தின் பரப்பைக் குறிக்கும்.

எனவே, சமன்பாடு (1)-லிருந்து, கொடுத்துள்ள ஓர் இணைகரத்தின் பரப்பானது அதன் மூலைவிட்டங்களால் ஆன இணைகரத்தின் பரப்பில் பாதி என்று தெரிகிறது.]

மாதிரிக்கணக்கு (9)

$\mathbf{A} = \mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = -3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ ஆகிய வெக்டர்களை அடுத்துள்ள பக்கங்களாகக் கொண்ட (a) இணைகரத்தின் (b) முக்கோணத்தின் பரப்பு காண்க.



படம்-30.

(a) இணைகரத்தின் பரப்பு = $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|$ [§ 16 குறிப்பு (8)]

இப்போது, $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

$= \mathbf{i}(2+6)-\mathbf{j}(1+9)+\mathbf{k}(-2+6)$

$= 9\mathbf{i}-10\mathbf{j}+4\mathbf{k}$

$\therefore$ இணைகரத்தின் பரப்பு = $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}| = \sqrt{8^2+10^2+4^2}$

$= \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$ ச. அலகு.

(b) முக்கோணத்தின் பரப்பு = இணைகரப் பரப்பின் பாதி

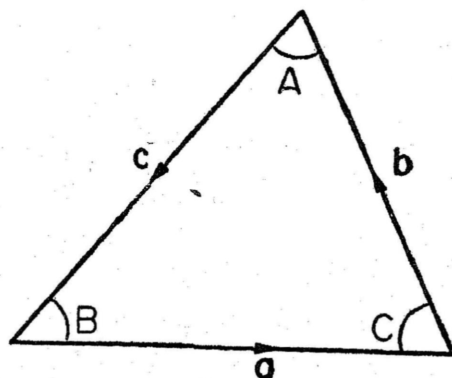
$= 5\sqrt{2}$ ச. அலகு.

மாதிரிக்கணக்கு (10)

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

என்ற திரிகோண சூத்திரத்தை நிறுவுக.

a, b, c என்பவை படம்-31-ல் காட்டியபடி ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் வெக்டர்களைக் குறிக்கட்டும்.



படம்-31.

$|\mathbf{a}| = a$, $|\mathbf{b}| = b$, $|\mathbf{c}| = c$ என்போம்.

படத்திலிருந்து, முக்கோண விதிப்படி

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=0$$

இந்தச் சமன்பாட்டை a யால் வெக்டர் குறுக்குப் பெருக்கல் செய்தால்

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times 0=0$$

அதாவது, $\mathbf{a}\times\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}=0$

அதாவது, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{c}\times\mathbf{a}$

இதேபோல் $\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$

$$\mathbf{c}\times\mathbf{a}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}$$

$$\therefore\quad \mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\mathbf{c}\times\mathbf{a}$$

$$\therefore\quad |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|=|\mathbf{c}\times\mathbf{a}|$$

அதாவது, $ab\sin C = bc\sin A = ca\sin B$

அதாவது, $\dfrac{\sin C}{c} = \dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b}$

அல்லது $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

மாதிரிக்கணக்கு 11 (a)

A, B, C ஆகிய வெக்டர்களில் $\mathbf{A} \neq 0$ என்ருல்

(அ) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$ மற்றும் (ஆ) $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \mathbf{A}\times\mathbf{C}$ என்ற இரண்டு நிபந்தனைகளுக்கும் உட்பட்டால் மட்டுமே $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ என்பது உறுதி என்று நிறுவுக.

(b) மேற்கூறிய நிபந்தனைகளில் ஏதாவது ஒன்று மட்டும் நிறைவேறினுல் என்ன முடிவு எடுக்கலாம் ?

(a) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$ மற்றும் $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \mathbf{A}\times\mathbf{C}$ என்ருல் $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}-\mathbf{C}) = 0$, மற்றும் $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}-\mathbf{C}) = 0$ ஆகும்.

$\mathbf{A} \neq 0$ என்பதால், $(\mathbf{B}-\mathbf{C})$ என்ற வெக்டர் **A**-க்கு ஒருங்கே (simultaneously) $\perp$ ஆகவும் $\parallel$ ஆகவும் இருக்கவேண்டும். ஆனுல் அப்படி ஒரு வெக்டர் இருக்கமுடியாது. ஆகவே, $(\mathbf{B}-\mathbf{C})$ என்ற வெக்டர் சுழி வெக்டர் ஆகும். அதாவது, $\mathbf{B} = \mathbf{C}$

(b) $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}-\mathbf{C}) = 0$ என்ற வகையை மாத்திரம் எடுத்துக் கொண்டால், $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ ஆகலாம் அல்லது $\mathbf{B}-\mathbf{C}$ என்ற வெக்டர் **A**-க்கு $\perp$ ஆகலாம்.

மேலும், $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}-\mathbf{C}) = 0$ என்ற வகையை மாத்திரம் எடுத்துக் கொண்டால், $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ ஆகலாம் அல்லது $(\mathbf{B}-\mathbf{C})$ என்ற வெக்டர் **A**-க்கு இணையாகலாம்.

மாதிரிக்கணக்கு (12)

$\mathbf{F} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ என்ற விசை $(1, -1, 2)$ என்ற புள்ளியில் செயல்படுகிறது. $(2, -1, 3)$ என்ற புள்ளியைக் குறித்து **F**-ன் திருப்புத்திறன் காண்க.

$P(1, -1, 2)$ என்ற புள்ளியின் நிலைவெக்டர்

$$\overrightarrow{OP} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \quad Q(2, -1, 3)$$

என்ற புள்ளியின் நிலைவெக்டர்

$$\overrightarrow{OQ} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

$$\therefore \quad \mathbf{r} = \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{GP} - \overrightarrow{OQ} = -\mathbf{i} - \mathbf{k}$$

Q வைக் குறித்து **F**-ன் திருப்புத்தறன் வெக்டர் $\mathbf{M} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 2\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

∴ திருப்புத்திறனின் பெறுமானம்

$$|\mathbf{M}| = \sqrt{4+49+4} = \sqrt{57}$$

மாதிரிக்கணக்கு (13)

ஒரு கட்டிருக்கப் பொருள் ஓர் அச்சைப் பற்றி $\Omega = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ என்ற கோணத்திசை வேகத்தில் சுழலுகிறது. அந்த அச்சில் உள்ள O என்ற புள்ளியைக் குறித்து கட்டிறுக்கப் பொருளின் ஒரு புள்ளி P-ன் வெக்டர் $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ என்றால், P-ன் திசைவேகம் காண்க.

P-ன் திசை வேகம் **V** என்போம்.

$$\overrightarrow{OP} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\therefore \quad \mathbf{V} = \Omega \times \mathbf{R}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 7\mathbf{i} - 8\mathbf{j} - 14\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{V}| = \sqrt{49+64+196} = \sqrt{319}$$

V-ன் தி. வி. $(7, -8, -14)$

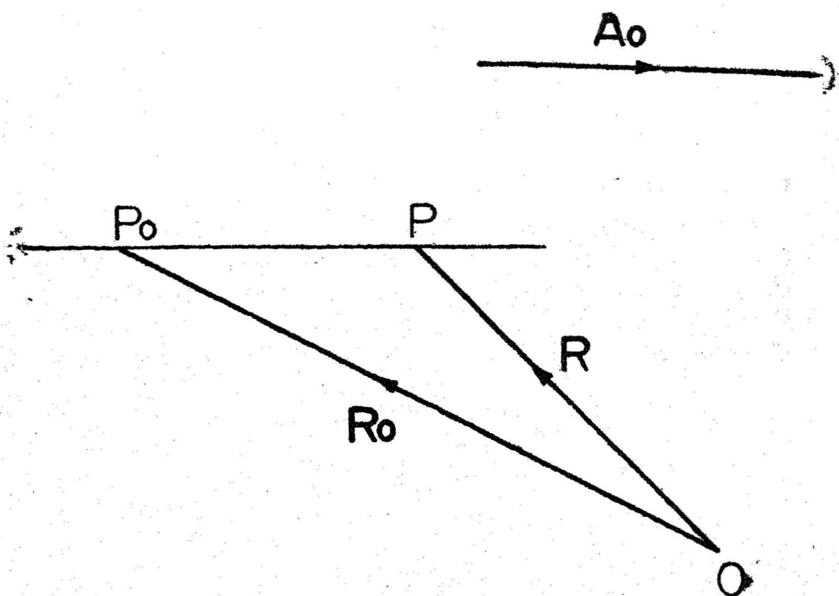
மாதிரிக்கணக்கு (14)

ஒரு நேர்கோடு $\mathbf{A}_0$ என்ற வெக்டருக்கு இணையாகவும், $\mathbf{R}_0$ ஐ நிலை வெக்டராக உள்ள P_0 என்ற புள்ளி வழியாகவும் செல்லுகிறது. அந்த நேர் கோட்டின் வெக்டர் சமன்பாடு யாது?

அந்த நேர்கோட்டின் மேலுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளி P-ன் நிலை வெக்டரை **R** எனக் குறிப்போம்.

$$\mathbf{R} = \overrightarrow{OP},\ \mathbf{R}_0 = \overrightarrow{OP_0}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = \mathbf{R} - \mathbf{R}_0$$



படம்-32.

இப்போது, $\overrightarrow{P_0P}$ என்ற வெக்டர், கொடுத்துள்ள வெக்டர் $\mathbf{A}_0$-க்கு இணையாதலால்

$$(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) \times \mathbf{A}_0 = 0 \qquad \dots \quad (1)$$

இதுவே நாம் விரும்பிய நேர்கோட்டின் வெக்டர் சமன்பாடு ஆகும்.

[குறிப்பு (1): $\mathbf{R}-\mathbf{R}_0$ என்ற வெக்டர் $\mathbf{A}_0$ என்ற வெக்டருக்கு இணை என்பதை

$$\mathbf{R}-\mathbf{R}_0 = t\,\mathbf{A}_0 \qquad \dots \quad (2)$$

(t எண்ணி) என்ற சமன்பாட்டாலும் குறிக்கலாம்.

(2) சமன்பாடு (2)-லிருந்து ஒரு நேர் கோட்டின் ஆயத் தொலை வடிவ சமன்பாட்டைக் காணலாம்.

$$\mathbf{A}_0 = l\,\mathbf{i} + m\,\mathbf{j} + n\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{R}_0 = x_0\,\mathbf{i} + y_0\,\mathbf{j} + z_0\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{R} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

என எடுத்துக் கொண்டால், கொடுத்துள்ள வெக்டர் $\mathbf{A}_0$-ன் தி.வி. (l, m, n) என்றும், வேண்டிய நேர்கோட்டில் கொடுத்துள்ள புள்ளி P_0-ன் ஆயத் தொலைகள் (x_0, y_0, z_0) என்றும், அந்த நேர் கோட்டின்மேல் ஏதாவதொரு புள்ளி P-ன் ஆயத் தொலைகள் (x, y, z) என்றும் அறிகிறோம்.

∴ சமன்பாடு (2)-லிருந்து

$$(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})-(x_0\mathbf{i}+y_0\mathbf{j}+z_0\mathbf{k})=t\,(l\mathbf{i}+m\mathbf{j}+n\mathbf{k})$$

$$\therefore\ (x-x_0)\,\mathbf{i} = t\,l\,\mathbf{i}$$

$$(y-y_0)\,\mathbf{j} = t\,m\,\mathbf{j}$$

$$(z-z_0)\,\mathbf{k} = t\,n\,\mathbf{k}$$

அல்லது, $$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \qquad \ldots \quad (3)$$

பயிற்சி—2.

(1) $\mathbf{A}=\mathbf{i}+3\mathbf{j}-2\mathbf{k}$, $\mathbf{B}=4\mathbf{i}-2\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ என்றால்

(அ) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ (ஆ) $(2\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}-2\mathbf{B})$

(இ) $\mathbf{A}^2$ (ஈ) $\mathbf{B}^2$ (உ) $(3\mathbf{A}+2\mathbf{B})^2$

ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(2) $\mathbf{A}=3\mathbf{i}+2\mathbf{j}-6\mathbf{k}$, $\mathbf{B}=4\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}$

என்ற வெக்டர்கள் செங்குத்தானவை எனக் காண்பிக்கவும்.

(3) $4\mathbf{i}-2\mathbf{j}+4\mathbf{k}$, $3\mathbf{i}-6\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ ஆகிய வெக்டர்களுக் கிடையே உள்ள கோணம் யாது?

(4) $a\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $2a\mathbf{i}+a\mathbf{j}-4\mathbf{k}$ ஆகிய வெக்டர்கள் செங் குத்தானவை என்றால் a-ன் மதிப்புகள் யாவை?

(5) $5\mathbf{i}+6\mathbf{j}+4\mathbf{k}$, $6\mathbf{i}+4\mathbf{j}+5\mathbf{k}$, $4\mathbf{i}+5\mathbf{j}+6\mathbf{k}$ ஆகிய வெக்டர்கள் ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களைக் குறித்தால் அது சமபக்க முக்கோணம் என நிறுவுக.

(6) $\mathbf{A} = 3\mathbf{i}-3\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-6\mathbf{k}$ ஆகிய வெக்டர்கள் ஓர் இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்களைக் குறிக்கின்றன. அந்த இணைகரம் ஒரு சாய்சதுரம் என நிறுவுக. மேலும், அந்தச் சாய் சதுரத்தின் பக்கம் காண்க. உட்கோணங்களைக் கணக்கிடுக.

(7) $\mathbf{B} = 2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}$ என்ற வெக்டர் மேல் $\mathbf{A} = 3\mathbf{i}-4\mathbf{j}-5\mathbf{k}$ என்ற வெக்டரின் குத்து வீச்சைக் காண்க.

(8) $(2, 3, -1)$, $(-2, -4, 3)$ ஆகிய புள்ளிகளின் வழியே செல்லும் கோட்டின் மேல் $4\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}$ என்ற வெக்டரின் குத்து வீச்சு யாது ?

(9) ஒரு துகள் $\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ என்ற நிலை வெக்டருடைய புள்ளியிலிருந்து $5\mathbf{i}+4\mathbf{j}+\mathbf{k}$, என்ற நிலை வெக்டருடைய புள்ளிக்கு $4\mathbf{i}+\mathbf{j}-3\mathbf{k}$, $3\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ என்ற விசைகளால் இடப் பெயர்ச்சியைப் பெற்றுள்ளது எனில், அந்த விசைகள் செய்த மொத்த வேலை எவ்வளவு ?

(10) xy தளத்திற்கு இணையாகவும், $4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ என்ற வெக்டருக்கு $\perp$ ஆகவும் உள்ள அலகு வெக்டர் யாது?

(11) $\mathbf{A} = 3\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i}-2\mathbf{j}-4\mathbf{k}$ என்பவை முறையே AB என்ற புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்களாகும்.

(அ) AB-க்கு $\perp$ ஆகவும், B வழியாகவும் செல்லும் தளத்தின் வெக்டர் சமன்பாட்டையும், ஆயத் தொலைவடிவ சமன் பாட்டையும் காண்க.

(ஆ) அந்தத் தளத்திலிருந்து $(-1, 1, 1)$ என்ற புள்ளியின் தொலைவைக் கணக்கிடுக.

(12) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ என்ற திரிகோண சூத்திரத்தை வெக்டர் முறையில் நிறுவுக.

(13) $\triangle ABC$-ல் G என்பது அதன் மையக் கோட்டுச் சந்தி (centroid). O என்பது ஏதாவதொரு புள்ளி என்றால்,

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(OA^2 + OB^2 + OC^2) - 9 \cdot OG^2$$

என்று நிறுவுக.

(14) $ABCD$ என்ற நாற்கரத்தில் AC, BD என்ற மூலை விட்டங்களின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே, P, Q என்ருல்,

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4PQ^2$$

என்று காட்டுக.

(15) $a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, $b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ என்ற இரண்டு வெக்டர்களுக்கு இடையே உள்ள கோணம் θ என்ருல்,

$$\sin\theta = \frac{\left\{(a_2b_3-a_3b_2)^2 + (a_3b_1-a_1b_3)^2 + (a_1b_2-a_2b_1)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{\frac{1}{2}}\ (b_1^2+b_2^2+b_3^2)^{\frac{1}{2}}}$$

என்று காண்பிக்கவும்.

(16) $A(1, 3, 2)$, $B(2, -1, 1)$, $C(-1, 2, 3)$ ஆகிய புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பைக் காண்க.

(17) ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருள், $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ என்ற வெக்டருக்கு இணையாகவும், $2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$ என்பதை நிலைவெக்டராகக் கொண்ட புள்ளி வழியாகச் செல்லும் ஓர் அச்சைப் பற்றி 3 ஆரையன்/விநுடி என்ற கோண வேகத்தில் சுழலுகிறது. அந்தக் கட்டிறுக்கப் பொருளில் $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ என்பதை நிலை வெக்டராக உடைய ஒரு புள்ளியின் திசைவேகத்தைக் காண்க.

(18) $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2 - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2$ என்று நிறுவுக.

(19) ஒரு நாற்கரத்தின் பரப்பு அதன் மூலைவிட்டங்களைப் பெருக்கி வந்த மதிப்பில் பாதியாகும் என்று வெக்டர் முறையில் நிறுவுக.

(20) ஒரு முக்கோண உச்சிகளின் நிலைவெக்டர்கள் $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ என்ருல், அந்த முக்கோணத்தின் பரப்பு

$$\frac{1}{2}\left\{\mathbf{B}\times\mathbf{C}+\mathbf{C}\times\mathbf{A}+\mathbf{A}\times\mathbf{B}\right\}$$

என்று காண்பிக்கவும்.

(21) $(4\mathbf{i}-3\mathbf{j}+2\mathbf{k})$ என்ற புள்ளியில் $(-2\mathbf{i}-3\mathbf{j}-5\mathbf{k})$ என்ற விசை செயல்பட்டால், $(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k})$ என்ற புள்ளியில் அந்த விசையின் திருப்புத்திறன் காண்க. (B.Sc., App. Sc.'73)

விடைகள்

(1) (அ) -10 (ஆ) -14 (இ) 14 (ஈ) 36
(உ) 150

(3) $\cos^{-1}\left(\frac{8}{21}\right)$ (4) $a=2, -1$

(6) பக்கம் $\frac{5\sqrt{3}}{2}$, உட்கோணங்கள் $\cos^{-1}\left(\frac{23}{75}\right)$, $\cos^{-1}\left(\frac{-23}{75}\right)$

(7) $\frac{13}{\sqrt{14}}$

(8) 1 (9) 40 அலகுகள் (10) $\frac{3}{5}\mathbf{i}+\frac{4}{5}\mathbf{j}$

(11) (அ) $(\mathbf{R}-\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{B})=0$; $2x+3y+6z=-28$
(ஆ) 5

(16) $\frac{1}{2}\sqrt{107}$ ச. அலகு. (17) $-2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$

(21) $-16\mathbf{i}-21\mathbf{j}-19\mathbf{k}$

3. மூன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட வெக்டர்களின் பெருக்கிகள்

(Product of three or more Vectors)

§ 19. வேறுபட்ட முப்பெருக்கிகள் (Different Triple Products)

A, B, C என்ற மூன்று வெக்டர்களை எடுத்துக்கொண்டால்,

(அ) $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\,\mathbf{C}$ (ஆ) $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ (இ) $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ என்ற மூன்று வகையான வேறுபட்ட முப்பெருக்கிகளைக் கணக்கிடலாம்.

[குறிப்பு : $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$, $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\,\mathbf{C}$ என்பவை வெக்டர் முறையில் பொருளற்றவை.

$\mathbf{A}\times\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ என்பதை $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}$ என்றும், $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ என்றும் இருவகைகளில் எடுத்துக் கொள்வதற்கு வாய்ப்பு இருப்பதால் $\mathbf{A}\times\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ என்பது விலக்கப்படவேண்டும்.]

§ 20. $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\,\mathbf{C}$ என்னும் முப்பெருக்கி

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ என்பது ஓர் எண்கணியம் $= k$ எனில்,

$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\,\mathbf{C} = k\,\mathbf{C}$ என்பது ஒரு வெக்டர். இந்த வெக்டரின் பெறுமானம் **C**-ன் பெறுமானத்தை k ஆல் பெருக்கி வந்த தொகையாகும். இதன் திசை **C**-ன் திசை ஆகும்.

[குறிப்பு : $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\,\mathbf{C} \neq \mathbf{A}\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$]

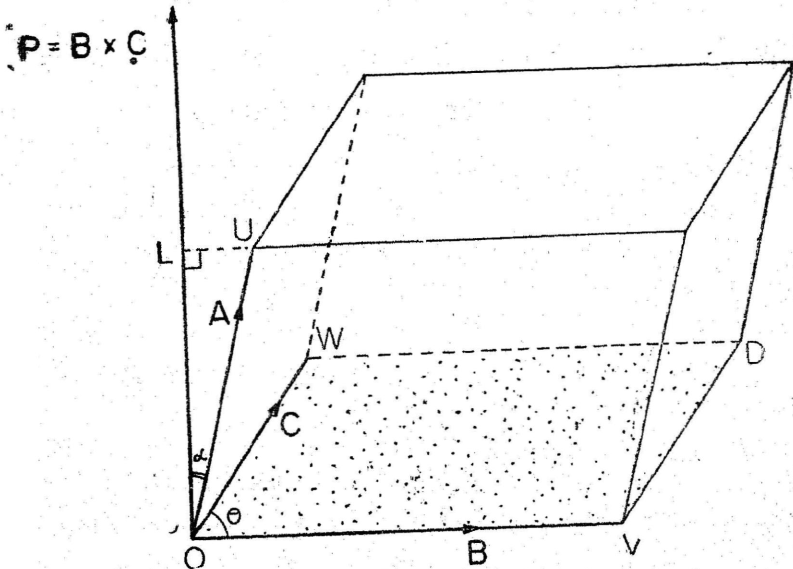
§ **21·1** $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$ என்னும் எண்ணி முப்பெருக்கி (Scalar Triple Product)

$\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ என்பது **B, C** ஆகிய இரண்டிற்கும் செங்குத்தாக உள்ள ஒரு வெக்டர். அதை **P** என்று குறிப்போம். அதாவது. $\mathbf{P} = \mathbf{B}\times\mathbf{C}$

$$\therefore \quad \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}$$
$$= \text{ஓர் எண் கணியம்}$$

இதனுல் A·(B×C) என்பது எண்ணி முப்பெருக்கி என்ற பெயர் பெற்றது.

§ 21·1. எண்ணி முப்பெருக்கிக்கு வடிவ கணித விளக்கம் (Geometrical interpretation)



படம்-33.

A, B, C என வரிசைப்படுத்திய வெக்டர்களை ஒரே புள்ளியில் சந்திக்கும் (co-terminus) வலக்கைத் தொகுதி வெக்டர்களாக எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\mathbf{A} = \overrightarrow{OU},\ \mathbf{B} = \overrightarrow{OV},\ \mathbf{C} = \overrightarrow{OW} \text{ என்க.}$$

இப்போது, A·(B×C) என்பது அந்த வெக்டர்களை ஒரே புள்ளியில் சந்திக்கும் விளிம்புகளாகக் (co-terminus edges) கொண்ட இணைகரத் திண்மத்தின் (parallelopiped) கன அளவைக் குறிக்கும் என்று காண்போம்.

படம்-33-லிருந்து

$|\mathbf{B} \times \mathbf{C}|$ = இணைகரம் $OVDW$-ன் பரப்பு

$\therefore \quad \mathbf{P} = \mathbf{B} \times \mathbf{C} = (OVDW$-ன் பரப்பு$)\ \hat{\mathbf{P}}$

(இங்கே $\hat{\mathbf{P}} = P$-ன் அலகு வெக்டர்) U-விலிருந்து இணைகரம் $OVDW$-க்குள்ள குத்துயரத்தை (altitude) h என்றும், $\mathbf{A}, \mathbf{P}$ என்ற வெக்டர்களுக்கு இடையே உள்ள கோணத்தை α என்றும் வைத்துக் கொள்வோம்,

$$h = OL = (OU) \cos \alpha = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{P}}$$

எனவே, $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \{\ |\mathbf{B} \times \mathbf{C}|\ \hat{\mathbf{P}}\}$

$$= |\mathbf{B} \times \mathbf{C}|\ \{\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{P}}\}$$

$$= |\mathbf{B} \times \mathbf{C}|\ \{h\}$$

= (இணைகரம் $OVDW$-ன் பரப்பு) (குத்துயரம்.)

= இணைகரத் திண்மத்தின் கன அளவு.

§ 22. எண்ணி முப்பெருக்கியின் பண்புகள்

§ 22·1. மேலே கூறிய வடிவகணித விளக்கத்தைப் (§ 21·1) பயன்படுத்தி,

இணைகரத் திண்மத்தின் கன அளவு

$V = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ என்றும் நிறுவலாம்.

எனவே, சமச்சீர் வடிவத்திலிருந்து

$$V = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \qquad \ldots \quad (1)$$

என்று தெளிவாகிறதல்லவா!

சமன்பாடு (1)-ல் காணும்

$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$; $\quad \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{A}$; $\quad \mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B}$

என்ற வட்ட வரிசையைக் கவனிக்கவும்.

§22·2. இரண்டு வெக்டர்களின் புள்ளிப் பெருக்கி, பரிமாற்று விதிக்குட்பட்டதால் $\quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A}$

$$\left.\begin{aligned} \therefore \quad \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} \\ \text{இதே போல், } \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) &= (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots \quad (2)$$

ஆனுல், § 22·1 சமன்பாடு (1)-லிருந்து

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$$

(2)-லிருந்து $\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$

$$\therefore\quad \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} \qquad \ldots \quad (3)$$

எனவே, $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ என்ற எண்ணி முப்பெருக்கியில் **A, B, C** என்ற வட்ட வரிசையை மாற்ருமல் · குறியையும், × குறியையும் மாற்றினுல் அதன் மதிப்பு மாருது.

இதனுல் $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ அல்லது $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$ என்பதைச் சுருக்கமாக [**ABC**] என்று எழுதுவது மரபு.

எனவே, **A, B, C** என்ற வெக்டர்கள் ஒரே புள்ளியில் சந்திக்கும் விளிம்புகளாகக் கொண்ட இணைகரத் திண்மத்தின் கன அளவு V எனில்,

$$\begin{aligned} V &= [\mathbf{A}\ \mathbf{B}\ \mathbf{C}] = [\mathbf{B}\ \mathbf{C}\ \mathbf{A}] = [\mathbf{C}\ \mathbf{A}\ \mathbf{B}] \\ &= \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \\ &= (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = (\mathbf{B}\times\mathbf{C})\cdot\mathbf{A} = (\mathbf{C}\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} \qquad \ldots \quad (4) \end{aligned}$$

§22·3.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) &= \mathbf{A}\cdot\{-(\mathbf{C}\times\mathbf{B})\} \\ &= -\mathbf{A}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{B}) \\ &= -[\mathbf{ACB}] \end{aligned}$$

§22·4.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \\ \mathbf{B} &= b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k} \\ \mathbf{C} &= c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k} \end{aligned}$$

எனில்,

$$[\mathbf{A}\ \mathbf{B}\ \mathbf{C}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

நிறுவல் :

$$\mathbf{B} \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}\,(b_2\, c_3 - b_3\, c_2) + \mathbf{j}\,(b_3\, c_1 - b_2\, c_3) + \mathbf{k}\,(b_1\, c_2 - b_2\, c_1)$$

$$\therefore \quad \left[\mathbf{A}\ \mathbf{B}\ \mathbf{C}\right] = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$$

$$= (a_1\,\mathbf{i} + a_2\,\mathbf{j} + a_3\,\mathbf{k}) \cdot \{ (b_2\, c_3 - b_3\, c_2)\mathbf{i} + (b_3\, c_1 - b_1\, c_3)\,\mathbf{j} + (b_1\, c_2 - b_2\, c_1)\,\mathbf{k} \}$$

$$= a_1\,(b_2\, c_3 - b_3\, c_2) + a_2\,(b_3\, c_1 - b_1\, c_3) + a_3\,(b_1\, c_2 - b_2\, c_1)$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

§ **22·5.** (அ) **A, B, C** என்ற மூன்று வெக்டர்களும் ஒரே தளத்தில் அமைந்தாலும் அல்லது (ஆ) மூன்றில் இரண்டு வெக்டர்கள் இணையாக இருந்தாலும் அல்லது (இ) மூன்று வெக்டர்களும் இணையாக இருந்தாலும்

$$\left[\mathbf{A}\ \mathbf{B}\ \mathbf{C}\right] = 0$$

நிறுவல் :

(அ) மூன்று வெக்டர்கள் ஒரே தளத்தில் அமைந்தால் அந்த வெக்டர்களால் இணைகரத் திண்மம் அமையாது. எனவே, அதன் கன அளவு = 0.

அதாவது, $[\mathbf{A}\ \mathbf{B}\ \mathbf{C}] = 0$

(ஆ) **B, C** என்ற இரண்டு வெக்டர்கள் இணையென்றால்,

$$\mathbf{B} \times \mathbf{C} = 0$$

$$\therefore \quad \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = 0 \quad \text{அதாவது } [\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{C}] = 0$$

(இ) மூன்று வெக்டர்களும் இணையாக இருந்தால்,

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \mathbf{B}\times\mathbf{C} = \mathbf{C}\times\mathbf{A} = 0$$

$$\therefore \quad [\mathbf{A\,B\,C}] = 0$$

§22·6. **A, B, C** என்ற மூன்றும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து வெக்டர்களெனில்,

$[\mathbf{A\,B\,C}] = a,\ b,\ c$ நீள, அகல, உயரமுள்ள செவ்வகப் பெட்டியின் கன அளவு $= abc$

i, j, k என்ற அலகு வெக்டர்களின் எண்ணி முப்பெருக்கி

$$= [\mathbf{i\,j\,k}] = 1$$

[குறிப்பு : $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ என எழுதினல் $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\times\mathbf{C}$ என்று எடுத்துக் கொள்ள முடியாது.

ஏனெனில், $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ ஓர் எண்ணி, **C** ஒரு வெக்டர். ஒரு எண்ணிக்கும் வெக்டருக்கும் குறுக்குப் பெருக்கி இல்லை. எனவே, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ என்பதை $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ என்றுதான் பொருள் கொள்ள வேண்டும். ஆகவே சிலர் $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ என்பதற்கு $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ என்றும் எழுதுவர்.]

§23. $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ என்ற வெக்டர் முப்பெருக்கி (Vector Triple Product)

$\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ என்பது **B, C** ஆகிய இரு வெக்டர்களுக்கும் செங்குத்தாக உள்ள ஒரு வெக்டர் **P** என்று கொள்வோம்.

$$\therefore \quad \mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{A}\times\mathbf{P}$$

$\mathbf{A}\times\mathbf{P}$ என்பது **A, P** ஆகிய இரண்டிற்கும் செங்குத்தான ஒரு வெக்டர் ஆகும். ஆனல் **P**-க்குச் செங்குத்தாக உள்ள வெக்டர் **B, C** ஆகியவற்றின் தளத்தில் இருக்கவேண்டும். எனவே, $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ என்ற வெக்டர் **B, C** தளத்தில் உள்ள மற்ருெரு வெக்டராகும்.

§23·1. தேற்றம்

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\,\mathbf{B} - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\,\mathbf{C}$$

(Kerala Engg. '65) (B.Sc. App. Sc. '73)

நிறுவல் :

$$\mathbf{A} = a_1\,\mathbf{i} + a_2\,\mathbf{j} + a_3\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{B} = b_1\,\mathbf{i} + b_2\,\mathbf{j} + b_3\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{C} = c_1\,\mathbf{i} + c_2\,\mathbf{j} + c_3\,\mathbf{k}$$

என்று எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\mathbf{B} \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \sum (b_2\,c_3 - b_3\,c_2)\,\mathbf{i}$$

$$\therefore\ \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2 c_3 - b_3 c_2 & b_3 c_1 - b_1 c_3 & b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2\,b_1\,c_2 - a_2\,b_2\,c_1 - a_3\,b_3\,c_1 + a_3\,b_1\,c_3)\,\mathbf{i}$$
$$+ (a_3\,b_2\,c_3 - a_3\,b_3\,c_2 - a_1\,b_1\,c_2 + a_1\,b_2\,c_1)\,\mathbf{j}$$
$$+ (a_1\,b_3\,c_1 - a_1\,b_1\,c_3 - a_2\,b_2\,c_3 + a_2\,b_3\,c_2)\,\mathbf{k}$$

இப்போது, $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\,\mathbf{B} - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\,\mathbf{C}$

$$= (a_1\,c_1 + a_2\,c_2 + a_3\,c_3)\,(b_1 i + b_2 j + b_3 k)$$
$$- (a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + a_3\,b_3)\,(c_1 i + c_2 j + c_3 k)$$

$$= (a_2\,b_1\,c_2 + a_3\,b_1\,c_3 - a_2\,b_2\,c_1 - a_3\,b_3\,c_1)\,\mathbf{i}$$
$$+ (a_1\,b_2\,c_1 + a_3\,b_2\,c_3 - a_1\,b_1\,c_2 - a_3\,b_3\,c_2)\,\mathbf{j}$$
$$+ (a_1\,b_3\,c_1 + a_2\,b_3\,c_2 - a_1\,b_1\,c_3 - a_2\,b_2\,c_3)\,\mathbf{k}$$

$$\therefore\ \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\,\mathbf{B} - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\,\mathbf{C}$$

[குறிப்பு (1): $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\,\mathbf{B}$ என்பது **B** என்ற வெக்டரின் மடங்கு (multiple) ஆகும். அவ்வாறே, $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\,\mathbf{C}$ என்பது **C** என்ற வெக்டரின் மடங்கு ஆகும்.

$\therefore$ $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\,\mathbf{B} - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\,\mathbf{C}$ என்பது **B**, **C** வெக்டர் தளத்திலுள்ள மற்றொரு வெக்டராகும்.

(2) $(A\times B)\times C = -C\times(A\times B)$

$$= -\{(C\cdot B)A - (C\cdot A)B\}$$

$$= (C\cdot A)B - (C\cdot B)A]$$

§ **24.** நான்கு வெக்டர்களின் எண்ணிப் பெருக்கி

A, B, C, D ஆகியவை நான்கு வெக்டர்கள் என்றால்

$$(A\times B)\cdot(C\times D)$$

என்பதை நான்கு வெக்டர்களின் எண்ணிப் பெருக்கி எனக் கூறுவர்.

$(A\times B)$ மற்றும் $(C\times D)$ ஆகியவை வெக்டர்கள்.

$\therefore$ $(A\times B)\cdot(C\times D)$ என்பது ஓர் எண்ணி ஆகும்.

$C\times D = E$ எனக் கொள்ளின்,

$$\therefore\ (A\times B)\cdot(C\times D) = (A\times B)\cdot E$$

$$= A\cdot(B\times E) \qquad [\S 22\cdot 2]$$

$$= A\cdot\{B\times(C\times D)\}$$

$$= A\cdot\{(B\cdot D)C - (B\cdot C)D\}$$

$$= (A\cdot C)(B\cdot D) - (B\cdot C)(A\cdot D)$$

$$= \begin{vmatrix} A\cdot C & A\cdot D \\ B\cdot C & B\cdot D \end{vmatrix}$$

§ **25.** நான்கு வெக்டர்களின் வெக்டர் பெருக்கி

A, B, C, D ஆகியவை நான்கு வெக்டர்களைக் குறித்தால்,

$$(A\times B)\times(C\times D)$$

என்பதை நான்கு வெக்டர்களின் வெக்டர் பெருக்கி என்று கூறுவர்.

$A\times B$ என்பது **A, B**-களுக்கு $\perp$ ஆக உள்ள ஒரு வெக்டர் $= P$ என்க.

இதேபோல், $C\times D$ என்பது **C, D**-களுக்கு $\perp$ ஆக உள்ள ஒரு வெக்டர் $= Q$ என்க.

$$\therefore\ (A\times B)\times(C\times D)\ P\times Q$$

இப்போது, $P\times Q$ என்பது **P, Q**-களுக்கு $\perp$ ஆக உள்ள ஒரு வெக்டர் $= R$ எனில்,

R என்ற வெக்டர் P, Q-களுக்கு ⊥ ஆக உள்ள தளத்தில் அமைய வேண்டும். அதாவது, A, B தளத்திலும், C, D தளத்திலும் அமைய வேண்டும்.

எனவே, A, B தளம், C, D தளம் ஆகியவற்றின் வெட்டு முகத்தில் (common section) R அமையும்.

$(A\times B)\times(C\times D)$ என்பதை இரண்டு வித்மாகப் பின்வருமாறு விரித்தெழுதலாம்.

§25·1. தேற்றம்

$$(A\times B)\times(C\times D) = [A\ B\ D]C - [C\ D\ A]B \quad \ldots (1)$$
$$= [C\ D\ A]B - [C\ D\ B]A \quad \ldots (2)$$

நிறுவல் :

$$(1)\quad (A\times B)\times(C\times D) = P\times(A\times B),\ \{P = A\times B\}$$
$$= (P\cdot D)\,C - (P\cdot C)\,D \quad \{\S 23\cdot 1\}$$
$$= \{(A\times B)\cdot D\}\,C - \{(A\times B)\cdot C\}\,D$$
$$= [ABD]\,C - [ABC]\,D \quad \ldots (1)$$

$$(2)\quad (A\times B)\times(C\times D) = (A\times B)\times Q \quad \{Q = C\times D\}$$
$$= -\,Q\times(A\times B)$$
$$= -\{Q\cdot B)\,A - (Q\cdot A)\,B\}$$
$$= (Q\cdot A)\,B - (Q\cdot B)\,A$$
$$= \{(C\times D)\cdot A\}\,B - \{(C\times D)\cdot B\}\,A$$
$$= [C\ D\ A]\,B - [C\ D\ B]\,A \quad \ldots (2)$$

§**25·2.** சமன்பாடு (1), ({§ 25·1 } -களில் உள்ள [ABD], [A B C], [C D A], [C D B], [C D B] ஆகிய எண்ணிகளை முறையே k, l, m, n எனக் குறித்தால்,

$$(A\times B)\times(C\times D) = k\,C - l\,D = m\,B - n\,A$$

$$\therefore\quad D = \frac{1}{l}\{k\,C + n\,A - m\,B\} \quad \ldots (3)$$

A, B. C என்பவை ஒரே தளத்தில் அமையாத மூன்று வெக்டர்கள் என்றால் $l = [A\ B\ C] \neq 0$

எனவே, சமன்பாடு (3)-லிருந்து எந்த ஒரு வெக்டர் D ஐயும் ஒரே தளத்தில் அமையாத ஏதாவது மூன்று வெக்டர்களின் ஒரு படிச் சேர்மானமாக (linear combination) எழுதமுடியும் என்று அறிகிறோம்.

§**26.** தலைகீழ் வெக்டர் தொகுதி (Reciprocal system of Vectors)

A, B, C என்பவை ஒரு தளத்தில் அமையாத மூன்று வெக்டர்கள் என்றால்

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mathbf{B}\times\mathbf{C}}{[\mathbf{ABC}]}\ ;\ \mathbf{B}_1 = \frac{\mathbf{C}\times\mathbf{A}}{[\mathbf{ABC}]}\ ;\ \mathbf{C}_1 = \frac{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}{[\mathbf{ABC}]}$$

ஆகிய மூன்று வெக்டர்களை **A, B, C**-களின் தலைகீழ் வெக்டர் தொகுதி என்பர்.

A, B, C ஒரு தளத்தில் அமையாத வெக்டர்கள் என்பதால் $[\mathbf{ABC}] \neq 0$.

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}_1 = \frac{\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})}{[\mathbf{ABC}]} = \frac{[\mathbf{ABC}]}{[\mathbf{ABC}]} = 1$$

$$\mathbf{A}_1\cdot\mathbf{A} = \frac{(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\cdot\mathbf{A}}{[\mathbf{ABC}]} = \frac{[\mathbf{BCA}]}{[\mathbf{ABC}]} = \frac{[\mathbf{ABC}]}{[\mathbf{ABC}]} = 1$$

எனவே, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_1\cdot\mathbf{A} = 1$

இவ்வாறே $\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_1\cdot\mathbf{B} = 1$ ... (1)

$\mathbf{C}\cdot\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_1\cdot\mathbf{C} = 1$

இதிலிருந்து 'தலைகீழ் வெக்டர்' என்ற பெயர்ப் பொருத்தம் அறியலாகிறது. மேலும், **A, B, C** என்ற மூன்று வெக்டர்கள் **A, B, C**-களின் தலைகீழ் வெக்டர் தொகுதி என்பதும் தெளிவாகிறது.

மாதிரிக்கணக்கு (1)

$$(\mathbf{B}+\mathbf{C})\cdot\{(\mathbf{C}+\mathbf{A})\times(\mathbf{A}+\mathbf{B})\} = 2[\mathbf{ABC}]$$

என்று நிறுவுக. இதற்கு வரைபட விளக்கமும் தருக.

இப்போது, $(\mathbf{C}\times\mathbf{A})\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$

$$= \mathbf{C}\times\mathbf{A} + \mathbf{C}\times\mathbf{B} + \mathbf{A}\times\mathbf{A} + \mathbf{A}\times\mathbf{B}$$

$$= \mathbf{C}\times\mathbf{A} + \mathbf{C}\times\mathbf{B} + \ \ 0\ \ + \mathbf{A}\times\mathbf{B}$$

$\therefore\ (\mathbf{B}+\mathbf{C})\cdot\{(\mathbf{C}+\mathbf{A})\times(\mathbf{A}+\mathbf{B})\}$

$$= \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) + \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) + \mathbf{C}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) + \mathbf{C}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{B}) + \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$$

$$= [\mathbf{B\ C\ A}] + [\mathbf{B\ C\ B}] + \mathbf{B\ A\ B}] + [\mathbf{C\ C\ A}] + [\mathbf{C\ C\ B}] + [\mathbf{C\ A\ B}]$$

$$= [A\,B\,C] + 0 + 0 + 0 + 0 + [A\,B\,C]$$

$$= 2[A\,B\,C]$$

வரைபட விளக்கம்

A, B, C என்பவை ஓர் இணைகரத் திண்மத்தின் ஒரே புள்ளியில் சந்திக்கும் மூன்று விளிம்புகளைக் குறிக்கட்டும் (படம்-33).

$[ABC]$ என்பது அந்த இணைகரத் திண்மத்தின் கனஅளவைக் குறிக்கும்.

B+C, C+A, A+B என்பவை, அந்த இணைகரத் திண்மப் பக்கங்களின் (ஒரே புள்ளியில் சந்திக்கும்) மூலைவிட்டங்களைக் குறிக்கும்.

$\therefore \quad (B+C) \cdot \{(C+A) \times (A+B)\}$ என்பது

B+C, C×A, A+B ஆகிய வெக்டர்களை ஒரே புள்ளியில் சந்திக்கும் விளிம்புகளாகக் கொண்ட இணைகரத் திண்மத்தின் கன அளவைக் குறிக்கும்.

கணக்கில் கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டிலிருந்து,

"**A, B, C** வெக்டர்களால் ஆன இணைகரத் திண்மத்தின் கன அளவானது, அதன் விட்டங்களால் ஆன இணைகரத் திண்மத்தின் கன அளவில் பாதியாகும்" என்று அறிகிறோம்.

மாதிரிக்கணக்கு (2)

$(A \times B) \cdot \{(B \times C) \times (C \times A\} = [ABC]^2$

என்று காண்பிக்கவும். (Kerala '66, 68.)

இடப்பக்கக் கோவை

$$= (A \times B) \cdot \{[BCA]\,C - [BCC]\,A\}$$

$$= (A \times B) \cdot \{[ABC]\,C - 0\}$$

$$= [ABC] \;\{(A \times B) \cdot C\}$$

$$= [ABC]\,[ABC]$$

$$= [ABC]^2$$

மாதிரிக்கணக்கு (3)

$R_n = x_n \mathbf{i} + y_n \mathbf{j} + z_n \mathbf{k}$ என்பவை $P_n(x_n, y_n, z_n)$, $(n = 1, 2, 3)$ என்னும் மூன்று புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர்கள் என்றால் அந்தப் புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாடு யாது? (P_1, P_2, P_3 ஆகிய புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டில் அமையவில்லை என்று எடுத்துக் கொள்க.)

O ஆதி என்றால் $\overrightarrow{OP_n} = \mathbf{R}_n$

P_1, P_2, P_3 என்ற புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் தளத்தில் ஏதாவதொரு புள்ளி $P(x, y, z)$ என்றால் P-ன் நிலைவெக்டர் $= \mathbf{R} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$

இப்போது, $\overrightarrow{P_1 P} = \overrightarrow{\mathbf{O}P} - \overrightarrow{\mathbf{O}P_1} = \mathbf{R} - \mathbf{R}_1$

$$\overrightarrow{P_1 P_3} = \overrightarrow{\mathbf{O}P_3} - \overrightarrow{\mathbf{O}P_1} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$$

$$\overrightarrow{P_1 P_2} = \overrightarrow{\mathbf{O}P_2} - \overrightarrow{\mathbf{O}P_1} = \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_1$$

$\overrightarrow{P_1 P}$, $\overrightarrow{P_2 P}$, $\overrightarrow{P_3 P}$ ஆகிய மூன்று வெக்டர்களும் ஒரு தளத்தில் அமைந்துள்ளதால்,

$$P_1 P \cdot (P_1 P_2 \times P_1 P_3) = 0$$

அதாவது, $(\mathbf{R}-\mathbf{R}_1)\cdot\{(\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_1)\times(\mathbf{R}_3-\mathbf{R}_1)\} = 0$

∴ வேண்டிய தளத்தின் ஆயத் தொலை வடிவ

சமன்பாடு $$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

மாதிரிக்கணக்கு (4)

A, B, C, D என்பவை ஏதாவது 4 வெக்டர்கள் என்றால்

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) + (\mathbf{B}\times\mathbf{C})\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{D}) + (\mathbf{C}\times\mathbf{A})\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{D}) = 0$$

என்று நிறுவுக. (Kerala Engg. '67.)

$$(A\times B)\cdot(C\times D) = \begin{vmatrix} A\cdot C & A\cdot D \\ B\cdot C & B\cdot D \end{vmatrix}$$

$$= (A\cdot C)(B\cdot D)-(A\cdot D)(B\cdot C) \quad \ldots \quad (1)$$

$$(B\times C)\cdot(A\times D) = \begin{vmatrix} B\cdot A & B\cdot D \\ C\cdot A & C\cdot D \end{vmatrix}$$

$$= (A\cdot B)(C\cdot D)-(A\cdot C)(B\cdot D) \quad \ldots \quad (2)$$

$$(C\times A)\cdot(B\times D) = \begin{vmatrix} C\cdot B & C\cdot D \\ A\cdot B & A\cdot D \end{vmatrix}$$

$$= (B\cdot C)(A\cdot D)-(A\cdot B)(C\cdot D) \quad \ldots \quad (3)$$

(1), (2), (3) சமன்பாடுகளைக் கூட்டினால்

$$(A\times B)\cdot(C\times D)+(B\times C)\cdot(A\times D)+(C\times A)\cdot(B\times D) = 0$$

மாதிரிக்கணக்கு (5)

A_1, B_1, C_1 என்பவை A, B, C-களின் தலைகீழ் வெக்டர் தொகுதி என்றால்,

(அ) $A\cdot B_1 = 0$ (ஆ) $[ABC]\,[A_1B_1C_1] = 1$

(இ) $A = \dfrac{B_1 \times C_1}{[A_1\, B_1\, C_1]}$ என்று காண்பிக்கவும்.

(அ) $$A\cdot B_1 = A\cdot \left\{ \frac{C \times A}{[ABC]} \right\} = \frac{A\cdot(C\times A)}{[ABC]}$$

$$= \frac{(A\times A)\cdot C}{[ABC]} = 0$$

இவ்வாறே, $A\cdot C_1 = B\cdot A_1 = B\cdot C_1 = C.A_1 = C\cdot B_1$
$= C_1\cdot A = A_1\cdot B = C_1\cdot B = A_1\cdot C = B_1\cdot C$
$= C$

(ஆ) $[A_1\, B_1\, C_1] = A_1 \cdot (B_1 \times C_1)$

$$= \frac{B\times C}{[ABC]} \cdot \left\{\left(\frac{C\times A}{[ABC]}\right) \times \left(\frac{A\times B}{[ABC]}\right)\right\}$$

$$= \frac{(B\times C)\cdot\{(C\times A)\times(A\times B)\}}{[ABC]^3}$$

$$= \frac{(B\times C)\cdot\{[CAB]A - [CAA]B\}}{[ABC]^3}$$

$$= \frac{[CAB]\{(B\times C)\cdot A\}}{[ABC]^3} \quad \left(\because\ [CAA] = 0\right)$$

$$= \frac{[ABC]^2}{[ABC]^3} = \frac{1}{[ABC]}$$

$\therefore\ [A_1B_1C_1]\,[ABC] = 1$

(இ) $$\frac{B_1\times C_1}{[A_1B_1C_1]} = \left\{\frac{C\times A}{[ABC]} \times \frac{A\times B}{[ABC]}\right\} \div [A_1B_1C]$$

$$= \frac{(C\times A)\times(A\times B)}{[ABC]\,[ABC]\,[A_1B_1C_1]}$$

$$= \frac{[CAB]A - [CAA]B}{[ABC]}$$

$(\because\ [ABC]\,[A_1B_1C] = 1)$

$$= \frac{[ABC]A}{[ABC]} \quad (\because\ [CAA] = 0)$$

$= A$

பயிற்சி—3.

(1) ஓர் இணைகரத் திண்மத்தின் விளிம்புகள் $3i-3j+4k$, $i+2j-k$, $3i-j+2k$ என்ற வெக்டர்களால் குறிக்கப்பட்டால் அதன் கன அளவு என்ன ?

(2) P, Q, R, S என்ற புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர்கள் முறையே $-6i+3j+2k$, $3i-2j+4k$, $5i+7j+3k$ $-13i+17j-k$ என்றால் அளவைகள் ஒரு தளத்தில் அமைந்துள்ளன என்று காண்பிக்கவும்.

(3) $A=i-2j-3k$, $B=2i+j-k$, $C=i+3j-2k$ என்றால் (அ) $[ABC]$ (ஆ) $A\times(B\times C)$ (இ) $(A\times B)\times C$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

(4) A, B, C, D ஆகிய நான்கு வெக்டர்களும் ஒரு தளத்தில் அமைந்தால்

$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = 0$ என்று நிறுவுக.

(5) ஒரே நேர் கோட்டில் அமையாத P, Q, R என்ற மூன்று புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர்கள் முறையே A, B, C என்றால்

$\mathbf{A}\times\mathbf{B}+\mathbf{B}\times\mathbf{C}+\mathbf{B}\times\mathbf{A}$

என்பது P, Q, R ஆகிய புள்ளிகளால் ஆன தளத்திற்குச் செங்குத்தாக உள்ள ஒரு வெக்டர் என்று காண்பிக்கவும்.

(6) $\mathbf{A}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{B}=\mathbf{i}=2\mathbf{j}-3\mathbf{k}$, $\mathbf{C}=3\mathbf{i}+a\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ ஆகிய மூன்று வெக்டர்கள் ஒரு தளத்தில் அமைந்தால் a-ன் மதிப்பு என்ன ?

(7) $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})+\mathbf{B}\times(\mathbf{C}\times\mathbf{A})+\mathbf{C}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = 0$ என்று நிறுவுக. [B. Sc. App. Se.'73]

(8) $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}$ என்றால் $\mathbf{B}\times(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = 0$ என்று காண்பிக்கவும்.

(9) $\mathbf{A} = x_1\,\mathbf{P}+y_1\,\mathbf{Q}+z_1\,\mathbf{R}$, $\mathbf{B} = x_2\,\mathbf{P}+y_2\,\mathbf{A}+z_2\,\mathbf{R}$, $\mathbf{C} = x_3\,\mathbf{P}+y_3\,\mathbf{Q}+z_3\,\mathbf{R}$ என்றால்

$$[\mathbf{ABC}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} [\mathbf{PQR}]$$ என நிறுவுக.

(10) $[\mathbf{ABC}] \neq 0$, மற்றும் $\mathbf{D} = x\,\mathbf{A}+y\,\mathbf{B}+z\,\mathbf{C}$

என்றால் $x = \dfrac{[\mathbf{DBC}]}{[\mathbf{ABC}]}$, $y = \dfrac{[\mathbf{ADC}]}{[\mathbf{ABC}]}$, $z = \dfrac{[\mathbf{ABD}]}{[\mathbf{ABC}]}$

என்று காண்பிக்கவும்.

விடைகள்

1. 7 க. அலகு
3. (அ) -20 (ஆ) $-\mathbf{i}-8\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ (இ) $5\mathbf{i}+15\mathbf{j}+20\mathbf{k}$
6. $a=-4$

4. வெக்டர் வகையிடல்

(Vector Differentiation)

§27. ஒரு வெக்டரின் வகைக்கெழு

$\mathbf{F}=\mathbf{F}(t)$ என்பது t என்ற ஓர் எண்ணி மாறி (scalar variable) யைக் குறித்து, ஒரே மதிப்புடையதும் தொடர்ச்சியுடையதுமான (single valued and continuous) சார்பு என்க. t ஐத் "துணையலகு" (parameter) என்றும் கூறலாம்.

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{F}(t+\Delta t) - \mathbf{P}(t)$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{F}(t+\Delta t)-\mathbf{F}(t)}{\Delta t}$$

$$\therefore \quad \underset{\Delta t \to 0}{Lt} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta t} = \underset{\Delta t \to 0}{Lt} \frac{\mathbf{F}(t+\Delta t)-\mathbf{F}(t)}{\Delta t}$$

இந்த எல்லை வெக்டரை (Limiting vector), tஐக் குறித்து $\mathbf{F}(t)$-ன் வகைக்கெழு என்பர். இதை $\dfrac{d\mathbf{F}}{dt}$ என்ற குறியீட்டால் குறிப்பிடுவர்.

$\dfrac{d\mathbf{F}}{dt}$ என்ற வெக்டர் t என்ற எண்ணி மாறியைச் சார்ந்துள்ளதால், இதை t ஐக் குறித்து மறுபடியும் வகையிடல் செய்யலாம். அப்போது $\dfrac{d^2\mathbf{F}}{dt^2}$ என்ற மற்றொரு வெக்டர் கிடைக்கும்.

இவ்வாறே, $\dfrac{d^3\mathbf{F}}{dt^3}$, $\dfrac{d^4\mathbf{F}}{dt^4}$, ... ஆகியவற்றையும் விளக்கலாம்.

§ 28. முப்பரிமாண வெளியில் ஒரு வளைகோட்டின் வெக்டர் சமன்பாடு (Vector equation of a curve in 3-dimensional space)

§ 27-ல் எடுத்துக் கொண்ட $\mathbf{F}(t)$ என்ற பொதுவான வெக்டர் சார்புக்குப் பதிலாக

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$$

என்ற t என்ற ஒரே எண்ணி மாறியைச் சார்ந்துள்ள $P(x, y, z)$ என்ற புள்ளியின் (நிலை வெக்டரை) எடுத்துக் கொள்வோம்.

t-ன் மதிப்பு மாறும்போது P என்ற புள்ளி, முப்பரிமாண வெளியில்,

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

என்னும் துணையலகுச் சமன்பாடுடைய ஒரு வளைகோட்டின்மேல் இயங்கும்.

$$\therefore \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \qquad \ldots \quad (1)$$

என்ற வெக்டர், t–ன் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கேற்ப முப்பரிமாண வெளியில் நகரும் புள்ளி P–ன் வெவ்வேறு நிலை வெக்டர்களைக் குறிக்கும்,

அதாவது, சமன்பாடு (1) முப்பரிமாண வெளியில் உள்ள ஒரு வளைகோட்டின் வெக்டர் சமன்பாடு ஆகும்.

§ 29. முப்பரிமாண வெளியில் ஒரு புள்ளியின் திசைவேகமும் (Velocity), முடுக்கமும் (Acceleration).

P, Q என்ற அடுத்தடுத்த (neighbouring) புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் முறையே $\mathbf{R}(t)$, $\mathbf{R}(t + \Delta t)$ என்போம். இங்கே $\mathbf{t}$ என்பது பொதுவான ஒரு துணையலகு என்று வைத்துக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad \Delta\mathbf{R} = \mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)$$

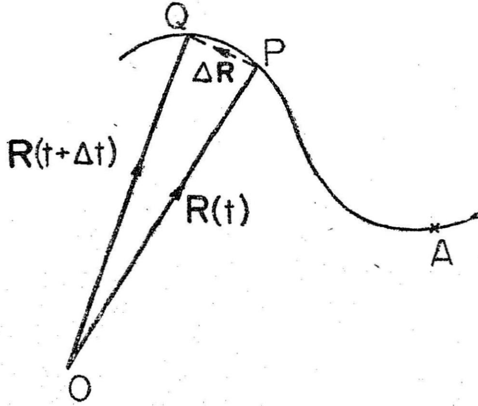
ஆனால், படம்-34-லிருந்து $\vec{OQ} = \vec{OP} + \vec{PQ}$

அதாவது, $\mathbf{R}(t + \Delta t) = \mathbf{R}(t) + \vec{PQ}$

எனவே, $\Delta\mathbf{R} = \vec{PQ}$

இதிலிருந்து, $\Delta\mathbf{R} = \mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)$

என்பது P-ன் இடப் பெயர்ச்சி (displacement) வெக்டர் $\overrightarrow{PQ}$ ஐக் குறிக்கும் என்று தெரிகிறது.



படம்-34.

இப்போது, Q என்ற புள்ளி வளைகோட்டின் மேல் நகர்ந்து Pஐ அணுகும்போது, $\Delta\mathbf{R}$-ன் திசையானது P-ல் அமையும் தொடுகோட்டின் திசையோடு ஒன்றிவிடும்.

$$\therefore \underset{\Delta t \to 0}{Lt} \frac{\mathbf{R}(t+\Delta t)-\mathbf{R}(t)}{\Delta t}$$

$$= \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{dy}{dt}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{dz}{dt}\right)\mathbf{k}$$

என்பது P-ல் அமையும் தொடுகோட்டு திசையில் உள்ள ஒரு வெக்டரைக் குறிக்கும்.

இங்கே t என்பது ஒரு பொதுவான துணையலகு என்பதால், $\frac{d\mathbf{R}}{dt}$ என்ற வெக்டருக்குத் தனியாக ஒரு பெயரோ பொருளோ கிடையாது.

ஆனால் t என்ற துணையலகு நேரத்தைக் குறித்தால், $\frac{d\mathbf{R}}{dt}$ என்பது P-ன் இடப் பெயர்ச்சி வெக்டரின் நேர மாறு வீதத்தை (time rate of change of displacement of P), அதாவது, P-ன் திசைவேகத்தைக் (velocity) குறிக்கும்.

எனவே, P-ன் நிலைவெக்டர் $\mathbf{R}$ என்றால் அந்தப் புள்ளியின் திசைவேக வெக்டர்

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$$

இதேபோல், P-ன் முடுக்க வெக்டர் (acceleration vector)

$$\mathbf{A} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2},$$

ஆகும். (t நேரத்தைக் குறிக்கும்).

படம்-34-ல் குறிப்பிட்ட ஒரு புள்ளி A-லிருந்து P, Q-களின் வில் நீளங்கள் (arc lengths) முறையே s, $s+\Delta s$ என்றால்

$\widehat{PQ}$ என்ற வில்லின் நீளம் $= \Delta s$

$\therefore \underset{\Delta t \to 0}{Lt} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$ என்பது P-ன் இடப் பெயர்ச்சி மாறு வீதத்தின் (அதாவது) திசை வேகத்தின் பெருமானத்தைக் (magnitude of velocity) குறிக்கும்.

இந்தத் திசைவேகப் பெருமானத்தை V எனக் குறிப்பிடுவது மரபு.

அதாவது $$v = \frac{ds}{dt}$$

இப்போது, $\frac{\Delta\mathbf{R}}{\Delta t} = \frac{\Delta\mathbf{R}}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}$

ஆனால் படம்-34-ல் $|\Delta\mathbf{R}| \simeq |\Delta s|$

$$\therefore \underset{\Delta s \to 0}{Lt} \left|\frac{\Delta\mathbf{R}}{\Delta s}\right| = \underset{\Delta s \to 0}{Lt} \frac{|\Delta\mathbf{R}|}{|\Delta s|} = 1$$

அல்லது $\left|\frac{d\mathbf{R}}{ds}\right| = 1$

$$\therefore \underset{\Delta t \to 0}{Lt} \frac{\Delta\mathbf{R}}{\Delta t} = \left(\underset{\Delta s \to 0}{Lt} \frac{\Delta\mathbf{R}}{\Delta s}\right)\left(\underset{\Delta t}{Lt} \frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$$

அதாவது, $\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}}{ds} v$ ... (1)

மேலும், $\left|\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right| = \left|\frac{d\mathbf{R}}{ds}\right| v = (1)\, v = v$

எனவே, $\frac{d\mathbf{R}}{ds}$ என்பது $\frac{d\mathbf{R}}{dt}$ திசையில் அமையும் ஓர் அலகு வெக்டரைக் குறிக்கிறது. மேலும் $\frac{d\mathbf{R}}{dt}$-ன் திசை P-ன் தொடு கோட்டு திசையாவதால், P-ல் அமையும் அலகுத் தொடுகோட்டு வெக்டரை $\mathbf{T}$ ($\hat{\mathbf{T}}$ அல்ல) எனக் குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

$$\therefore \quad \boxed{\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{R}}{ds}}$$

(1)-லிருந்து $$\boxed{\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = v\frac{d\mathbf{R}}{ds} = v\,\mathbf{T}}$$

§ 30. வெக்டர் வகையிடல் சூத்திரங்கள்

அடியில் காணும் சூத்திரங்களில் ϕ என்பது எண்ணிச்சார்பு (scalar function), **A, B, C** என்பவை வெக்டர் சார்புகள் (Vector functions). இந்த எண்ணி மற்றும் வெக்டர் சார்புகள் t என்ற பொதுவான துணையலகைச் சார்ந்தவை.

(1) $\frac{d}{dt}(\phi\mathbf{A}) = \phi\frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\phi}{dt}\mathbf{A}$

(2) $\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt}\cdot\mathbf{B}$

(3) $\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt}\times\mathbf{B}$

(4) $\frac{d}{dt}\{\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\} = \mathbf{A}\cdot\left(\mathbf{B}\times\frac{d\mathbf{C}}{dt}\right) + \mathbf{A}\cdot\left(\frac{d\mathbf{B}}{dt}\times\mathbf{C}\right) + \frac{d\mathbf{A}}{dt}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$

அல்லது, $\frac{d}{dt}[\mathbf{A\,B\,C}] = [\mathbf{A\,B\,C'}] + [\mathbf{A\,B'\,C}] + [\mathbf{A'\,B\,C}]$

இங்கு, $A' = \frac{dA}{dt}$, $B' = \frac{dB}{dt}$, $C' = \frac{dC}{dt}$

(5) $$\frac{d}{dt}\{A \times (B \times C)\} = A \times \left(B \times \frac{dC}{dt}\right) + A \times \left(\frac{dB}{dt} \times C\right) + \frac{dA}{dt} \times (B \times C)$$

நிறுவல் :

(1) $R = \phi A$ எனில்,

$$R + \Delta R = (\phi + \Delta\phi)(A + \Delta A)$$

$$\therefore \Delta R = (\phi + \Delta\phi)(A + \Delta A) - \phi A$$

$$= \phi \Delta A + (\Delta\phi) A + (\Delta\phi)(\Delta A)$$

$$\therefore \frac{\Delta R}{\Delta t} = \phi \frac{\Delta A}{\Delta t} + \left(\frac{\Delta\phi}{\Delta t}\right) A + \left(\frac{\Delta\phi}{\Delta t}\right)\left(\frac{\Delta A}{\Delta t}\right)(\Delta t)$$

$$\frac{dR}{dt} = \underset{\Delta t \to 0}{Lt} \frac{\Delta R}{\Delta t} = \phi \frac{dA}{dt} + \frac{d\phi}{dt} A + 0$$

அதாவது, $$\frac{d}{dt}(\phi A) = \phi \frac{dA}{dt} + \frac{d\phi}{dt} A$$

இதைப் போன்றே மற்ற சூத்திரங்களையும் நிறுவலாம். மாணவர்கள் இவற்றைப் பயிற்சியாக எடுத்துக் கொள்வார்களாக.

[குறிப்பு (1): மேற்கண்ட சூத்திரங்களில் அமைந்துள்ள வெக்டர்களின் வரிசையை மாற்றக் கூடாது என்பதை நன்கு நினைவிற் கொள்ள வேண்டும்.

(2) மேற்கண்ட வகைச் சூத்திரங்களைப் போலவே

$$d(\phi A) = \phi\, dA + (d\phi) A$$

போன்ற வகையீட்டு (differential) சூத்திரங்களையும் அடையலாம்.

§ 31. தேற்றம்

A என்பது சுழியல்லாத (non-zero) ஆனால் மாறுத பெறுமானம் உடைய வெக்டரைக் குறித்தால் dA என்பது A-க்கு ⊥ ஆக உடைய ஒரு வெக்டரைக் குறிக்கும்.

(ஒரு வெக்டர் மாரு வெக்டர் என்ருல் அதன் பெறுமானம் மாறிலி என்றும், ஆனல் அதன் திசை மட்டும் மாறி என்றும் பொருள் கொள்ள வேண்டும்).

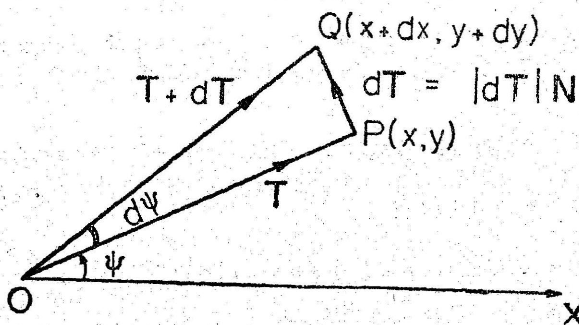
நிறுவல் :

$$A \cdot A = |A|^2 = (\text{A-ன் பெறுமானம்})^2$$
$$= \text{மாறிலி}$$
$$\therefore \quad d(A \cdot A) = d(\text{மாறிலி}) = 0$$
$$\text{அதாவது, } A \cdot dA + dA \cdot A = 0$$
$$2(A \cdot dA) = 0$$
$$\therefore \quad A \cdot dA = 0$$
$$A \neq 0 \text{ என்பதால், } dA \neq 0$$
$$\therefore \quad dA \perp A$$

[குறிப்பு (1): வெக்டர் A-ன் பெறுமானம் மாறிலி என்ருல், dA-ன் பெறுமானமும் மாறிலியாக இருக்கவேண்டிய தேவை யில்லை.

(2) T என்பது P-ல் அமையும் அலகுத் தொடுகோட்டு வெக்டர் என்பதால் அதன் பெறுமானம் = 1 (மாறிலி)

$\therefore$ dT என்பது T-க்குச் செங்குத்தாக உள்ள ஒரு வெக்டர் ஆகும். ஆனல் dT-ன் பெறுமானம் 1 அல்ல.]



படம்-35.

Ox என்ற ஒரு நிலையான (fixed) அச்சிலிருந்து $\vec{OP} = \mathbf{T}$ என்ற அலகு வெக்டர் ψ கோணத்திலும் $\vec{OQ} = \mathbf{T} + d\mathbf{T}$ என்ற வெக்டர் $\psi + d\psi$ கோணத்திலும் இருக்கட்டும்.

பின்பு, $\overrightarrow{PQ} = d\mathbf{T}$; மேலும், $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{OP}$

அதாவது, $d\mathbf{T}$ என்ற வெக்டர் P-ல் அமையும் வரைச் செங்கோட்டுத் (normal) திசையில் இருக்கும்.

இந்த வரைச் செங்கோட்டின் அலகு வெக்டரைப் பொதுவாக $\mathbf{N}$ என்று குறிப்பது வழக்கம்

$$\therefore \quad d\mathbf{T} = |d\mathbf{T}|\,\mathbf{N}$$

இனி, புள்ளி Q ஆனது புள்ளி P–யை அணுகும் போது

$$\left|\overrightarrow{OP}\right| \simeq \left|\overrightarrow{OQ}\right| = 1$$

$\therefore$ OPQ என்ற வட்டக் கோணப் பகுதியிலிருந்து

$$\left|\widehat{PQ}\right| \simeq \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|d\mathbf{T}\right| = (d\psi)$$

$$\therefore \quad d\mathbf{T} = (d\psi)\,\mathbf{N}$$

அல்லது,

$$\frac{d\mathbf{T}}{d\psi} = \mathbf{N}$$

§ 32 ஒரு வளைகோட்டின் வளைவு (Curvature)

வரைவிலக்கணம் :

ஒரு வளைகோட்டின் வில் நீளத்தைக் குறித்து அதன் தொடுகோட்டுத் திசையின் மாறுவீதமானது அந்த வளைகோட்டின் வளைவிற்கான அளவாக வழங்கப்படும்.

ஒரு வளைகோட்டின் மேல் உள்ள ஒரு புள்ளி P-ல் அமையும் தொடுகோடு x அச்சிலிருந்து ψ கோணத்தில் உள்ளது என்றும், வளைகோட்டின் மேல் உள்ள குறிப்பிட்ட ஒரு புள்ளி A-லிருந்து Pவரை உள்ள வில் நீளம் s என்றும் கொள்வோம்.

மேற்கூறிய வரைவிலக்கணத்திலிருந்து

P என்ற புள்ளியில் வளைவு (curvature)

$$= \underset{\Delta s \to 0}{Lt} \frac{\Delta\psi}{\Delta s} = \frac{d\psi}{ds}$$

ஆனால், P-ல் அமையும் அலகுத் தொடுகோட்டு வெக்டர் T என்றால் $|d\mathbf{T}| = d\psi$ என்று § 31-ல் பார்த்தோம்.

$$\therefore \quad P\text{-ல் உள்ள வளைவு} = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \frac{d\psi}{ds}$$

மேலும், $d\mathbf{T}$ என்ற வெக்டரின் திசை T-க்கு ⊥ ஆக உள்ள வரைச் செங்கோட்டுத் திசை.

அதாவது, N-ன் திசை என்றும் அறிவோம்.

$$\therefore \quad \text{வளைவு வெக்டர்} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| \mathbf{N} = \frac{d\psi}{ds}\mathbf{N}$$

வரைவிலக்கணம் :

$\left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{\rho}$ என்றால் ρ என்ற எண்ணியை வளை வாரம் அல்லது வளைவாரை (radius of curvature) என்று வழங்குவர்.

$$\therefore \quad \rho = \frac{ds}{d\psi} = \frac{1}{\left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right|}$$

P-ன் அடுத்துள்ள புள்ளி Q என்றும், P, Q-களில் அமையும் வரைச் செங்கோடுகள் C-ல் சந்திக்கின்றன என்றும் வைத்துக் கொள்வோம்.

C என்ற புள்ளியை P-ன் வளைவு மையம் (centre of curvature) என்பர்.

$$CP = \rho \text{ ஆகும்.}$$

§ 32-1. தேற்றம்

$P(x, y, z)$ என்ற புள்ளியின் நிலை வெக்டர் R என்றால்

$$\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$\therefore \quad \mathbf{T} = \frac{d\mathbf{R}}{ds} = \left(\frac{dx}{ds}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{dy}{ds}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{dz}{ds}\right)\mathbf{k}$$

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d^2\mathbf{R}}{ds^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)\mathbf{k}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\rho^2} = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right|^2 = \left|\frac{d^2\mathbf{R}}{ds^2}\right| = \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{d^2z}{ds^2}$$

$$\text{அதாவது, } \rho = \frac{bs}{d\psi} = \left\{\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{d^2z}{ds^2}\right\}$$

§ 33. ஒரு தளத்தில் நகரும் புள்ளியின் திசைவேகம் மற்றும் முடுக்கம் காணல்

§ 33·1. x—, y— திசைகளில்

$P(x, y)$ என்ற புள்ளியின் நிலை வெக்டர்

$$\mathbf{R} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$$

$\therefore$ திசைவேக வெக்டர் $= \mathbf{V} = \dfrac{d\mathbf{R}}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\mathbf{i} + \dfrac{dy}{dt}\mathbf{j}$

$\therefore$ x-திசையில் திசைவேக பெறுமானம் $= \dfrac{dx}{dt}$

மற்றும், y-திசையில் திசைவேக பெறுமானம் $= \dfrac{dy}{dt}$

முடுக்க வெக்டர் $= \mathbf{A} = \dfrac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \dfrac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \dfrac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j}$

$\therefore$ x-திசையில் முடுக்கத்தின் பெறுமானம் $= \dfrac{d^2x}{dt^2}$

மற்றும், y-திசையில் முடுக்கத்தின் பெறுமானம் $= \dfrac{d^2y}{dt^2}$

§ 33·2. தொடுகோடு, வரைச் செங்கோடு திசைகளில்

(அ) திசை வேகம்

ஒரு புள்ளியின் தொகுபயன் (resultant) திசைவேகம் தொடு கோட்டுத் திசையில் தான் அமையும் என்றும், அந்தத் திசை வேக வெக்டர் $\mathbf{V} = v\mathbf{T}$ என்றும் § 29-ல் ஏற்கெனவே பார்த்திருக்கிறோம்.

ஆகவே, வரைச் செங்கோட்டுத் திசையில் திசைவேகக் கூறு கிடையாது.

(ஆ) முடுக்கம்

$$\text{முடுக்க வெக்டர்} = \mathbf{A} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\mathbf{T})$$

$$= v\frac{d\mathbf{T}}{dt} + \frac{dv}{dt}\mathbf{T}$$

$$= v\frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt} + \frac{dv}{dt}\mathbf{T}$$

$$= v^2\frac{d\mathbf{T}}{ds} + \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T}$$

$$= v^2\frac{1}{\rho}\mathbf{N} + \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} \quad (\S\ 32)$$

$$= \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{N}$$

∴ தொடு கோட்டுத் திசையில் முடுக்கத்தின் பெறுமானம்

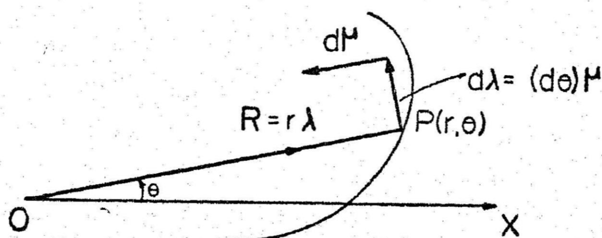
$$= \frac{d^2 s}{dt^2}$$

மற்றும், வரைச் செங்கோட்டுத் திசையில் முடுக்கத்தின் பெறுமானம் $= \frac{v^2}{\rho}$.

§33·3 துருவ ஆயத் தொலைகளில் (Polar coordinates):

புள்ளி O–வை ஆதியாகவும், நேர்கோடு OX ஐ நிலையான அச்சாகவும் எடுத்துக் கொள்வோம்.

P என்ற புள்ளியின் துருவ ஆயத் தொலைகள் (r, θ) என்றும் அதன் நிலைவெக்டர் **R** என்றும் வைத்துக் கொள் [படம்-36].



படம்-36.

$|\mathbf{R}| = r, \quad \hat{\mathbf{R}} = \lambda$ என்போம். $\therefore \mathbf{R} = r\lambda$

இப்போது, $d\lambda$ என்பது λ-க்கு $\perp$ ஆக உள்ள வெக்டர் ஆகும் (§ 31).

λ-க்குச் செங்குத்துத் திசையில் உள்ள அலகு வெக்டரை μ எனக் குறித்தால்

$$d\lambda = (d\theta)\,\mu \qquad \text{(§ 31 குறிப்பு 2)}$$

இதுபோலவே, $d\mu$ என்பது μ-க்கு $\perp$ ஆக உள்ள ஒரு வெக்டர் ஆகும்.

$$\therefore \; d\mu = -(d\theta)\,\lambda \qquad \text{[படம்-36]}$$

(அ) திசைவேகம்

$$\text{திசைவேக வெக்டர்} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\lambda)$$

$$= r\frac{d\lambda}{dt} + \frac{dr}{dt}\lambda$$

$$= r\frac{d\theta}{dt}\mu + \frac{dr}{dt}\lambda$$

$$= \left(\frac{dr}{dt}\right)\lambda + \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)\mu$$

$$= \dot{r}\lambda + (r\dot{\theta})$$

$$= \left(\text{இங்கே } \dot{r} = \frac{dr}{dt},\ \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}\right)$$

$\therefore$ $\overrightarrow{OP}$ திசையில் திசைவேக பெறுமானம் $= \dot{r}$

மற்றும் $\overrightarrow{OP}$-க்கு $\perp$ திசையில் திசைவேக பெறுமானம் $= r\dot{\theta}$

(ஆ) முடுக்கம்

$$\text{முடுக்க வெக்டர்} = \mathbf{A} = \frac{d\mathbf{V}}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\left\{\dot{r}\lambda + (r\dot{\theta})\mu\right\}$$

$$= \left(\dot{r}\frac{d\lambda}{dt} + \ddot{r}\lambda\right) + \left(r\dot{\theta}\frac{d\mu}{dt} + r\ddot{\theta}\mu + \dot{r}\dot{\theta}\mu\right)$$

$$= \left(\dot{r}\dot{\theta}\mu + \ddot{r}\lambda\right) + \left\{r\dot{\theta}\left(-\dot{\theta}\lambda\right) + r\ddot{\theta}\mu + r\ddot{\theta}\mu\right\}$$

$$= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\lambda + \left(r\ddot{\theta} - 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\mu$$

$$= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\lambda + \left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)\right\}\mu$$

$$\left(\text{இங்கே, } \ddot{r} = \frac{d^2r}{dt^2},\ \ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$$

$\therefore$ $\overrightarrow{OP}$ திசையில் முடுக்கத்தின் பெறுமானம்

$$= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

மற்றும் $\overrightarrow{OP}$-க்கு ⊥ திசையில் முடுக்கத்தின்

$$\text{பெறுமானம்} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$$

§ 34. ஒரு வெக்டரின் பகுதி வகைக்கெழு (Partial derivative of a vector)

இதுவரை நாம் ஆராய்ந்த வெக்டர்கள் (x, y, z அல்லது r, θ அல்லது s வழியாக) t என்ற ஒரேயொரு எண்ணி மாறியைச் சார்ந்திருந்தன. ஆகவே, மேற்கண்ட வெக்டர் வகைக் கெழுக்களை 't ஐக் குறித்து முழு வகைக் கெழுக்கள்' (total derivatives with respect to t) என வழங்கலாம்.

ஆனால் **A** என்ற வெக்டர், இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட எண்ணி மாறிகளைச் சார்ந்திருந்தால் மேற்கூறிய முழு வகைக்கெழுவைக் காணமுடியாது என்றாலும் பகுதிவகைக் கெழுக்களைக் காண இயலும்.

A என்ற வெக்டர் x, y, z என்ற மூன்று எண்ணி மாறிகளைச் சார்ந்திருந்தால்

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}\,(x, y, z)$$

என எழுதுவது மரபு.

x ஐக் குறித்து **A**-ன் பகுதிவகைக் கெழு

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} = \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\mathbf{A}\,(x + \Delta x, y, z) - \mathbf{A}\,(x, y, z)}{\Delta x}$$

என்று வரைவிலக்கணம் செய்யப்படும்.

இவ்வாறே,

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} = \underset{\Delta y \to 0}{Lt} \frac{\mathbf{A}\,(x, y + \Delta y, z) - \mathbf{A}\,(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} = \underset{\Delta z \to 0}{Lt} \frac{\mathbf{A}\,(x, y, z + \Delta z) - \mathbf{A}\,(x, y, z)}{\Delta z}$$

என்பவை முறையே y ஐக் குறித்து, z ஐக் குறித்து **A**-ன் பகுதி வகைக் கெழுக்களாகும்.

மேலும்,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\right)$$

பொதுவாக, $\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x}$

மூன்றுவது வகைக் கெழுக்களையும் இதே முறையில் அறிந்து கொள்ளலாம்.

. வகை நுண்கணிதத்திலிருந்து (Differential Calculus)

$$dA = \frac{\partial A}{\partial y}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy + \frac{\partial A}{\partial z}dz$$

என்பதையும் எளிதில் பெறலாம்.

மாதிரிக்கணக்கு (1)

ஒரு புள்ளி t நேரத்தில் $x = 2 \sin 3t$. $y = 2\cos 3t$, $z = 8t$ என்ற துணையலகுச் சமன்பாடு உள்ள முப்பரிமாண வளை கோட்டில் நகருகிறது. அதன் திசைவேக வெக்டர், முடுக்க வெக்டர் ஆகியவற்றைக் காண்க. அவற்றின் பெறுமானங்களையும் கணக்கிடுக.

கணக்குப்படி t நேரத்தில் அந்தப் புள்ளியின் நிலை வெக்டர்

$$\mathbf{R} = (2\sin 3t)\,\mathbf{i} + (2\cos t)\,\mathbf{j} + (8t)\,\mathbf{k}$$

∴ திசைவேக வெக்டர் $\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$

$$= (6\cos 3t)\mathbf{i} - (6\sin 3t)\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$$

திசைவேகத்தின் பெறுமானம்

$$= \sqrt{36\cos^2 3t + 36\sin^2 3t + 64}$$

$$= 10$$

முடுக்க வெக்டர் $\mathbf{A} = \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}$

$$= (-18\sin 3t)\,\mathbf{i} - (18^2 \cos 3t)\,\mathbf{j}$$

முடுக்கத்தின் பெறுமானம்

$$= \sqrt{18^2 \sin^2 3t + 18^2 \cos^2 3t}$$

$$= 18$$

மாதிரிக்கணக்கு (2)

$$A = t^2 \mathbf{i} - t\,\mathbf{j} + (2t + 1)\,\mathbf{k}$$

மற்றும் $B = (2t - 3)\,\mathbf{i} + \mathbf{j} - t\,\mathbf{k}$ என்றால்,

$t = 1$ என்னும் போது பின்வருவனவற்றைக் கணக்கிடுக:

(அ) $\frac{d}{dt}(A\cdot \mathbf{B})$ (ஆ) $\frac{d}{dt}(A\times \mathbf{B})$ (இ) $\frac{d}{dt}|\mathbf{A}+\mathbf{B}|$

(ஈ) $\frac{d}{dt}\left(\mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right)$

(அ) $\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt}\cdot\mathbf{B}$

$$= \{t^2\,\mathbf{i} - t\,\mathbf{j} + (2t+1)\,\mathbf{k}\}\cdot(2\,\mathbf{i} - \mathbf{k})$$
$$+ (2t\,\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\,\mathbf{k})\cdot\{2t - 3)\,\mathbf{i} + \mathbf{j} - t\,\mathbf{k}\}$$

இப்போது $t = 1$ என்றால்,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\,\mathbf{k})\cdot(2\,\mathbf{i} - \mathbf{k})$$
$$+ (2\,\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\,\mathbf{k})\cdot(-\,\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})$$
$$= (2 - 3) + (-2 - 1 - 2)$$
$$= -1 - 5 = -6$$

(ஆ) $\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt}\times\mathbf{B}$

$$= \{t^2\,\mathbf{i} - t\,\mathbf{j} + (2t+1)\,\mathbf{k}\}\times(2\,\mathbf{i} - \mathbf{k})$$
$$+ (2t\,\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\,\mathbf{k})\times\{2t - 3)\,\mathbf{i} + \mathbf{j} - t\,\mathbf{k}\}$$

இனி, $t = 1$ என்றால்,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k})\times(2\mathbf{i} - \mathbf{k})$$
$$+ (2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k})\times(-\,\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}\,(1-0) - \mathbf{j}\,(-1-6) + \mathbf{k}\,(0+2)$$
$$+ \mathbf{i}\,(1-2) - \mathbf{j}\,(-2+2) + \mathbf{k}\,(2-1)$$
$$= 7\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

(இ) $\mathbf{A}+\mathbf{B}=(t^2+2t-3)\mathbf{i}+(1-t)\mathbf{j}+(t+1)\mathbf{k}$

$$\therefore\ |\mathbf{A}+\mathbf{B}|=\{(t^2+2t-3)^2+(1-t)^2+(t+1)^2\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore\ \frac{d}{dt}|\mathbf{A}+\mathbf{B}|$$

$$=\tfrac{1}{2}\{(t^2+2t-3)^2+(1-t)^2+(t+1)^2\}^{-\frac{1}{2}}$$
$$\times\{2(t^2+2t-3)(2t+2)+2(1-t)(-1)+2(t+1)\}$$

$t=1$ என்றால்,

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{A}+\mathbf{B}|=\frac{1}{2}\{(1+2-3)^2+(1-1)^2+(1+1)^2\}^{-\frac{1}{2}}$$
$$=\{2(1+2-3)(2+2)+2(1-1)(-1)+2(1+1)\}$$
$$=\frac{1}{2}(1)^{-\frac{1}{2}}\times 4=1$$

மாற்று வழி :

$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{C}$ எனக் குறித்தால்

$$\mathbf{C}\cdot\mathbf{C}=|\mathbf{C}|^2=|\mathbf{A}+\mathbf{B}|^2$$

$$\therefore\ \mathbf{C}\cdot\frac{d\mathbf{C}}{dt}+\frac{d\mathbf{C}}{dt}\cdot\mathbf{C}=2|\mathbf{C}|\frac{d}{dt}|\mathbf{C}|$$

அல்லது, $2\,\mathbf{C}\cdot\dfrac{d\mathbf{C}}{dt}=2|\mathbf{C}|\dfrac{d}{dt}|\mathbf{C}|$

$$\therefore\ \left\{\frac{d}{dt}|\mathbf{C}|\right\}_{t=1}=\left\{\frac{\mathbf{C}\cdot\frac{d\mathbf{C}}{dt}}{|\mathbf{C}|}\right\}_{t=1}$$

இப்போது. $\{\mathbf{C}\}_{t=1}=2\mathbf{k}$

$$|\mathbf{C}|_{t=1}=2$$

$$\left\{\frac{d\mathbf{C}}{dt}\right\}_{t=1}=\{(2t+2)\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}\}_{t=1}$$
$$=4\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

$$\therefore\ \left\{\mathbf{C}\cdot\frac{d\mathbf{C}}{dt}\right\}_{t=1}=2$$

எனவே, $\left\{\dfrac{d}{dt}|\mathbf{C}|\right\}_{t=1}=\dfrac{2}{2}=1$

(ஈ) $\frac{d\mathbf{B}}{dt} = 2\mathbf{i} - \mathbf{k}$

$$\therefore \quad \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ t^2 & -t & 2t+1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}(t) - \mathbf{j}(-t^2 - 4t - 5) + \mathbf{k}(0 + 2t)$$
$$= t\,\mathbf{i} + (t^2 + 4t + 2)\mathbf{j} + 2t\,\mathbf{k}$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}\left(\mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}\right) = \mathbf{i} + (2t+4)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

இப்போது, $t = 1$ என்றால்

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}\right) = \mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

மாதிரிக்கணக்கு (3)

t நேரத்தில் ஒரு புள்ளியின் நிலைவெக்டர்

$$\mathbf{R} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{2}{3}t^2\mathbf{k} \text{ ஆகும்.}$$

$t=1$ என்ற நேரத்தில் அந்தப் புள்ளியின் திசை வேகம், முடுக்கம் ஆகியவற்றின் கூறுகளை (resolved parts) தொடுகோடு, வரைச் செங்கோடு ஆகிய திசைகளில் காண்க. அந்தப் புள்ளியில் வளைகோட்டின் வளைவரையையும் கணக்கிடுக.

திசைவேகம்

திசைவேக வெக்டர் $\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}$

அதன் பெறுமானம் $v = |\mathbf{V}| = \sqrt{1+4t^2+t^2} = (1-2t^2)$

$t = 1$ என்றால் $\mathbf{V} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

அப்போது திசைவேகத்தின் பெறுமானம் $[v]_{t=1} = |\mathbf{V}|_{t=1}$
$= 1 + 2\cdot1^2 = 3$ அலகு.

தொகுபயன் திசைவேகம் தொடுகோட்டுத் திசையில் அமைவதால், செங்கோட்டுத் திசையில் திசைவேகக் கூறு (component) கிடையாது.

எனவே, தொடுகோட்டுத் திசையில் திசைவேகம் $= 3$ அலகு.

வளைவாரை :

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{R}}{ds} = \frac{d\mathbf{R}/dt}{ds/dt} = \frac{d\mathbf{R}/dt}{v} = \frac{\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}}{(1+2t^2)}$$

வளைவாரை ρ என்றால்

$$\frac{1}{\rho}\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt} = \frac{1}{v}\frac{d\mathbf{T}}{dt}$$

$$= \frac{1}{v}\left\{\frac{(1+2t^2)(2\mathbf{j}+4t\mathbf{k}) - (\mathbf{i}+2t\mathbf{j}+2t^2\mathbf{k})4t}{(1+2t^2)^2}\right\}$$

$$= \frac{-4t\,\mathbf{i} + (2-4t^2)\,\mathbf{j} + 4t\,\mathbf{k}}{(1+2t^2)^3}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\rho} = \frac{|\,4t\mathbf{i}+(2-4t^2)\mathbf{j}+4t\mathbf{k}\,|}{(1+2t^2)^3}$$

$$= \frac{\sqrt{16t^2+(2-4t^2)^2+16t^2}}{(1+2t^2)^3}$$

$$= \frac{\sqrt{4+16t^2+16t^4}}{(1+2t^2)^3}$$

$$= \frac{2(1+2t^2)}{(1+2t^2)^3} = \frac{2}{(1+2t^2)^2}$$

$$\therefore \rho = \frac{1}{2}(1+2t^2)^2$$

$t = 1$ என்ற நேரத்தில்

$$[\rho]_{t=1} = \frac{1}{2}(1+2)^2 = \frac{9}{2}$$

முடுக்கம் :

முடுக்க வெக்டர் $\mathbf{A} = \dfrac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \dfrac{v^2}{\rho}\mathbf{N}$

இப்போது, $\dfrac{ds}{dt} = v = 1 + 2t^2$

$$\therefore \frac{d^2s}{dt^2} = 4t$$

$\therefore$ $t = 1$ என்ற நேரத்தில் $\dfrac{d^2s}{dt^2} = 4$

மேலும், $\left[\dfrac{v^2}{\rho}\right]_{t=1} = \left\{\dfrac{(1+2t^2)^2}{\frac{1}{2}(1+2t^2)^2}\right\}_{t=1} = 2$

எனவே, தொடு கோட்டுத் திசையில் முடுக்கத்தின் கூறு = 4 அலகு ஆகும்.

மற்றும், வரைச் செங்கோட்டுத் திசையில் முடுக்கத்தின் கூறு = 2 அலகு ஆகும்.

பயிற்சி—4.

(1) ஒரு புள்ளி, $x = 2t^2$, $y = t^2 - 4t$, $z = 3t - 5$ (t நேரத்தைக் குறிக்கிறது) என்ற வளைகோட்டில் நகர்ந்து கொண்டிருந்தால், $t = 1$ என்னும் நேரத்தில் அந்தப் புள்ளியின் திசைவேகம், முடுக்கம் ஆகியவற்றின் கூறுகளை (components), $\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ என்ற வெக்டர் திசையில் கணக்கிடுக.

(2) $x = t^2 + 1$, $y = 4t - 3$, $z = 2t^2 - 6t$ என்ற வளைகோட்டில், $t = 2$ என்ற புள்ளியில் அமையும் தொடுகோட்டின் அலகு வெக்டர் காண்க.

(3) $\mathbf{A} = 5t^2\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} - t^3\,\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = (\sin t)\,\mathbf{i} - (\cos t)\,\mathbf{j}$ என்றால்

(அ) $\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$ (ஆ) $\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ இ) $\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A})$

ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

(4) வில் நீளம் (arc length) s ஐத் துணையலகாகக் கொண்ட

$x = \tan^{-1}s$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\log(s^2+1)$, $z = s - \tan^{-1}s$ என்ற

துணையலகுச் சமன்பாடு ஒரு வளை கோட்டைக் குறித்தால், அதன் அலகுத் தொடுகோட்டு வெக்டர், அலகுச் செங்கோட்டு வெக்டர், வளைவாரை ஆகியவற்றைக் காண்க.

(5) $\mathbf{A} = (\cos xy)\,\mathbf{i} + (3xy - 2x^2)\,\mathbf{j} - (3x + 2y)\,\mathbf{k}$

எனில், $\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial y\partial x}$ என்று காண்பிக்கவும்.

(6) $\mathbf{R} = e^{-t}(\mathbf{A}\cos 2t + \mathbf{B}\sin 2t)$

என்றால் $\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} + \frac{2d\mathbf{R}}{dt} + 5\,\mathbf{R} = 0$

என்று நிறுவுக. (இங்கே **A**, **B** மாறா வெக்டர்கள்.)

(7) $y = f(x)$, $z = 0$ என்ற ஒரு தளத்தில் அமைந்த வளை கோட்டின் வளைவாரை $\rho = \frac{1}{|y''|}\sqrt{1 + (y')^2}$ என்று நிறுவுக.

விடைகள்

(1) திசைவேகம் $= \frac{8\sqrt{14}}{7}$, முடுக்கம் $= -\frac{\sqrt{14}}{7}$

(2) $\frac{1}{3}(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$

(3) (அ) $(5t^2-1)\cos t + 11t\sin t$

(ஆ) $(t^3\sin t - 3t^2\cos t)\mathbf{i} - (t^3\cos t + 3t^2\sin t)\mathbf{j}$
$+ (5t^2\sin t - \sin t - 11t\cos t)\mathbf{k}$

(இ) $100t^3 + 2t + 6t^5$

(4) $\mathbf{T} = \frac{\mathbf{i} + \sqrt{2}\,s\,\mathbf{j} + s^2\mathbf{k}}{s^2+1}$

$\mathbf{N} = \frac{-\sqrt{2}\,s\,\mathbf{i} + (1-s^2)\mathbf{j} + \sqrt{2}\,s\,\mathbf{k}}{(s^2+1)}$

$\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}(s^2+1)$

5. ஒரு வெக்டரின் வாட்டம், பாய்வு, சுழல்

(Gradient, Divergence and Curl of a vector)

§ 35. எண்ணிக் களம், வெக்டர் களம் (Scalar and Vector fields)

(1) கொடுத்துள்ள ஒரு (முப்பரிமாண) மண்டலத்தில் (region) அமையும் ஒவ்வொரு புள்ளி (x, y, z) ஐப் பொறுத்தும் $\phi(x, y, z)$ என்ற ஒரு எண்ணிச் சார்பு உண்டென்றால், அந்த எண்ணிச் சார்பு, புள்ளி நிலை எண்ணிச் சார்பு என்றும் (scalar point function), அம் மண்டலம் எண்ணிக் களம் (scalar field) என்றும் பெயர் பெறும்.

எடுத்துக்காட்டு :

நிலத்தின் மேல் தளத்தில் உள்ள பல புள்ளிகளின் வெப்பநிலை ஓர் எண்ணிக் களம் ஆகும்.

(2) காற்று மண்டலத்தின் பல புள்ளிகளில் காற்றின் அடர்த்தி ஓர் எண்ணிக் களம்.

(3) $\phi(x, y, z) = xy^2 + y^2 z$ என்பது ஓர் எண்ணிக் களத்தைக் குறிக்கும்.

கொடுத்துள்ள ஒரு (முப்பரிமாண) மண்டலத்தில் அமையும் ஒவ்வொரு புள்ளி (x, y, z) ஐப் பொறுத்தும் $V(x, y, z)$ என்ற ஒரு வெக்டர் சார்பு (vector function) உண்டென்றால், அந்த வெக்டர் சார்பை, புள்ளி நிலை வெக்டர் சார்பு (vector point function) என்றும், அம் மண்டலத்தை வெக்டர் களம் (vector field) என்றும் வழங்குவர்.

எடுத்துக்காட்டு:

(1) குறிப்பிட்ட ஒரு நேரத்தில் முப்பரிமாண வெளியில் இயங்கிக் கொண்டிருக்கும் ஒரு புள்ளியின் திசைவேகம், முடுக்கம், உந்தம் (momentum). அந்தப் புள்ளியின் மேல் செயல் படும் விசை முதலியன வெக்டர் களங்களைக் குறிக்கும்.

(2) $V(x, y, z) = x^2 y^2 \mathbf{i} - 2y^2 z^3 \mathbf{j} + 3 z x \mathbf{k}$ என்பது ஒரு வெக்டர் களத்தைக் குறிக்கும்.

[குறிப்பு : (1) முப்பரிமாண வெளியைக் கொண்டு எண்ணிக்களம், வெக்டர் களம் ஆகியவற்றை விளக்கி யிருக்கிறோம். ஆனால், இரு பரிமாண வெளியிலும் மேற்கூறிய வரைவிலக்கணங்கள் பொருந்தும்.

(2) ஓர் எண்ணி அல்லது வெக்டர்களம் நேரத்தைச் சாரா திருந்தால் (independent of time), அதை நிலைத்த (steady state) எண்ணி அல்லது வெக்டர் களம் என்பர்.]

§ 36. 'டெல்' என்னும் வெக்டர் வகைச் செயலி (Vector differential operator 'Del').

சாதாரண வெக்டர்களைப் போன்று, ∇ என்ற குறியீடு கொண்ட டெல் என்று சொல்லப்படும் வகைச் செயலியின் வரைவிலக்கணம் வருமாறு :

$$\nabla \equiv \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

இந்தக் குறியீட்டு வெக்டரின் (symbolic vector) **i, j, k** திசைகளில் உள்ள கூறுகள் முறையே $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ என்னும் செயலிகள் ஆகும். ஆதலால் ∇ என்பதை வெக்டர் வகைச் செயலி என்கிறோம்.

இந்த வெக்டர் வகைச் செயலியைப் பயன்படுத்தி வாட்டம் (gradient), பாய்வு (divergence), சுழல் (curl) என்னும் மூன்று விதமான கணியங்களை வரையறுக்கலாம்.

§ 37. ஓர் எண்ணிச் சார்பின் வாட்டம் (Gradient of a scalar function)

கொடுத்துள்ள ஒரு மண்டலத்தில் அமையும் $\phi(x, y, z)$ என்ற எண்ணிக் களத்திற்கு, ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் வகைக்கெழு உண்டெனில்,

$$\nabla \phi \equiv \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \right)\phi$$

$$\equiv \mathbf{i}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial \phi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\equiv \sum \mathbf{i}\frac{\partial \phi}{\partial x} \equiv \sum \frac{\partial \phi}{\partial x}\mathbf{i}$$

என்ற வெக்டர் சார்பை ϕ-ன் வாட்டம் அல்லது டெல் ϕ என்று கூறுவர்.

$\nabla\phi$ என்பதை வாட்டம் ϕ அல்லது grad ϕ என்று எழுதுவதும், மொழிவதும் உண்டு.

[குறிப்பு *(1)*: ஓர் எண்ணிச் சார்பின் வாட்டம் ஒரு வெக்டர் களம் ஆகும் என்பதை நன்கு ஓர்க.

F என்பது வெக்டர் சார்பு என்றால். ∇F என்பதற்குப் பொருள் இல்லை.

(2) ϕ, ψ என்பதற்கு இரண்டு எண்ணிச் சார்புகள் என்றால்

(அ) $\nabla(\phi \pm \psi) = \nabla\phi \pm \nabla\psi$ (வெளிப்படை)

(ஆ) $\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$

(இ) $\nabla\left(\frac{\phi}{\psi}\right) = \frac{\psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi}{\psi^2}$

நிறுவல்

(ஆ) $$\nabla(\phi\psi) = \sum \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}(\phi\psi)$$

$$= \sum \mathbf{i}\left\{\phi\frac{\partial\psi}{\partial x} + \psi\frac{\partial\phi}{\partial x}\right\}$$

$$= \phi\sum \mathbf{i}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \psi\sum \mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}$$

$$= \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$$

(இ) $$\nabla\left(\frac{\phi}{\psi}\right) = \sum \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\phi}{\psi}\right)$$

$$= \sum \mathbf{i}\left\{\frac{\psi\frac{\partial\phi}{\partial x} - \phi\frac{\partial\psi}{\partial x}}{\psi^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{\psi^2}\left\{\psi \sum \mathbf{i}\,\frac{\partial \phi}{\partial x} - \phi \sum \mathbf{i}\,\frac{\partial \psi}{\partial x}\right\}$$

$$= \frac{1}{\psi^2}\{\psi \nabla \phi - \phi \nabla \psi\}$$

(3) ϕ என்பது ஓர் எண்ணிச் சார்பு என்றால் $f(\phi)$ என்பது அந்த எண்ணிச் சார்பின் சார்பு ஆகும்.

$$\nabla f(\phi) = f'(\phi)\,\nabla \phi;\left\{f'(\phi) = \frac{d}{d\phi} f(\phi)\right\}$$

நிறுவல் :

$$\nabla f(\phi) = \sum \mathbf{i}\,\frac{\partial}{\partial x}\{f(\phi)\}$$

$$= \sum \mathbf{i}\left[\frac{\partial}{\partial \phi}\{f(\phi)\}\,\frac{\partial \phi}{\partial x}\right]$$

$$= \sum \mathbf{i}\left[\{f'(\phi)\}\,\frac{\partial \phi}{\partial x}\right]$$

$$= f'(\phi)\sum \mathbf{i}\,\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$= f'(\phi)\,\nabla \phi]$$

§ 38. $\nabla \phi$-ன் பண்புகள்

(அ) $\phi(x, y, z)$ என்பது $P(x, y, z)$ என்ற பொதுவான ஒரு புள்ளியின் வெப்ப நிலையைக் குறித்தால்,

$\phi(x, y, z) = c$ (c சுழி உட்பட ஒரு மாறிலி) என்பது வெப்ப நிலை c-யாக உள்ள எல்லாப் புள்ளிகளும் அமையும் ஒரு முப்பரிமாண, வளைபரப்பைக் (three dimensional surface) குறிக்கும்.

இந்த வளைபரப்பிற்குச் சமநிலை வளைபரப்பு (level surface) என்று பெயர்.

$\phi(x, y, z) = C$ என்பது ஒரு சமநிலை வளைபரப்பைக் குறித்தால், $\nabla\phi$ என்பது அந்த வளைபரப்பிற்கு $\perp$ ஆக உள்ள ஒரு வெக்டர் (அதாவது) செங்கோட்டு வெக்டர் (normal vector) ஆகும்.

இதையே பின்வருமாறு மாற்றிக் கூறலாம்.

$\phi(x, y, z) = C$ என்ற சமநிலை வரைபரப்பின் அலகுச் செங்கோட்டு வெக்டர் N என்றால்

$$\nabla\phi = |\nabla\phi| \mathbf{N}$$ [B E. '69]

நிறுவல் :

கொடுத்துள்ள சமநிலை வரை பரப்பின் மேல் அமையும் ஏதாவதொரு புள்ளி $P(x, y, z)$ என்றால் அதன் நிலை வெக்டர்

$$\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$\therefore \quad d\mathbf{R} = \mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy + \mathbf{k}\,dz = \Sigma\,\mathbf{i}\,dx$$

இப்போது, $d\mathbf{R}$ என்ற வெக்டர் R-க்கு ⊥ ஆக இருப்பதால் (§29), $d\mathbf{R}$ ஒரு தொடுகோட்டு வெக்டர் ஆகும்.

ஆனால் $\Delta\phi \cdot d\mathbf{R} = \left(\sum \mathbf{i}\,\frac{\partial\phi}{\partial x}\,\phi\right) \cdot (\Sigma\,\mathbf{i}\,dx)$

$$= \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz$$

$= d\phi$ (வகைக் கெழு நூலிலிருந்து)

$= d(c) \quad (\therefore \quad \phi(x, y, z) = c)$

$= 0$

அதாவது $\nabla\phi \cdot d\mathbf{R} = 0$

ஆனால், $\nabla\phi \neq 0,\ d\mathbf{R} \neq 0$

$$\therefore \quad \nabla\phi \perp d\mathbf{R}$$

இதிலிருந்து, $\nabla\phi$ என்ற வெக்டர் $d\mathbf{R}$ என்ற தொடுகோட்டு வெக்டருக்குச் செங்குத்தாக இருக்கவேண்டும். எனவே, $\nabla\phi$ ஒரு செங்கோட்டு வெக்டரைக் குறிக்கும்.

அலகு செங்கோட்டு வெக்டர் N என்றால்,

$$\nabla\phi = |\nabla\phi|\ \mathbf{N} \quad \dots \quad (1)$$

(ஆ) திசை வகைக்கெழு (Directional derivative)

கொடுத்துள்ள ஓர் எண்ணிக்களம் $\phi(x, y, z)$ ன் ஒரு பொதுவான $P(x, y, z)$ என எடுத்துக் கொள்வோம்.

P-ன் நிலை வெக்டர்

$$\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$Q\,(x + \triangle x,\ y + \triangle y,\ z + \triangle z)$ என்ற அடுத்த புள்ளியின் நிலைவெக்டர்

$$\mathbf{R} + \triangle \mathbf{R} = (x + \triangle x)\,\mathbf{i} + (y + \triangle y)\,\mathbf{j} + (z + \triangle z)\,\mathbf{k}$$

$\overrightarrow{OP} = \mathbf{R},\ \overrightarrow{OQ} = \mathbf{R} + \triangle \mathbf{R}$ என்பதால்

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \triangle \mathbf{R} = \Sigma\, \mathbf{i}\, \triangle x$$

$$\therefore \quad \underset{Q \to P}{Lt} \ |\overrightarrow{PQ}| = |d\mathbf{R}| \simeq ds$$

இங்கே, ds என்பது PQ-ன் வில் நீளம்.

இப்போது, $\dfrac{d\phi}{ds} \equiv \underset{\triangle s \to 0}{Lt} \dfrac{\triangle \phi}{\triangle s}$ என்பது

PQ திசையில் ϕ-ன் மாறு வீதத்தைக் குறிக்கும் (rate of change of ϕ in the direction of $\overrightarrow{PQ}$)

ஆதலால், $\dfrac{d\phi}{ds}$ ஐ $\overrightarrow{PQ}$ திசையில் திசை வகைக் கெழு அல்லது சுருக்கமாக திசைவகைக் கெழு (directional derivative) என்கிறோம்.

ஆனால், நுண்கணித நூலிலிருந்து

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{\partial \phi}{\partial x}\ \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\ \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\ \frac{dz}{ds}$$

$$= \left(\sum \mathbf{i}\, \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) \cdot \left(\sum \mathbf{i}\, \frac{dx}{ds}\right)$$

$$= (\nabla \phi) \cdot \frac{d\mathbf{R}}{ds}$$

இப்போது, $\dfrac{d\mathbf{R}}{ds}$ என்பது $\overrightarrow{PQ}$ திசையில் ஓர் அலகு வெக்டர் என்று நாம் அறிவோம். (§ 29)

$\therefore \quad (\nabla \phi) \cdot \frac{d\mathbf{R}}{ds}$ என்பது $\overrightarrow{PQ}$ திசையில் $\nabla\phi$-ன் குத்து வீச்சு அல்லது கூறு (component) ஆகும். (§ 13 குறிப்பு 10)

எனவே, ஓர் எண்ணிச் சார்பு ϕ-ன் திசை வகைக்கெழு வானது அந்த திசையில் $\nabla\phi$-ன் கூறு அல்லது $\nabla\phi$-ன் குத்து வீச்சு ஆகும்.

[குறிப்பு : A என்ற வெக்டர் திசையில் $\phi(x, y, z)$ என்ற எண்ணிச் சார்பின் திசை வகைக் கெழு $= \nabla\phi \cdot \hat{\mathbf{A}}$

($\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$-ன் அலகு வெக்டர்)

$\mathbf{A} = a\hat{\mathbf{A}}$ என்றால்,

$$\frac{d\phi}{da} = (\nabla\phi) \cdot \hat{\mathbf{A}} = |\nabla\phi| \mathbf{N} \cdot \hat{\mathbf{A}}$$

என்று எழுதுவது வழக்கம்.

இனி, $\frac{d\phi}{da}$ என்றால் A திசையில் ϕ-ன் திசை வகைக் கெழு என்று அறிக.]

(இ) $\phi(x, y, z)$ என்ற எண்ணிச் சார்பின் மிகப் பெரிய (maximum) மாறுவீத வெக்டர் $\nabla\phi$ ஆகும்.

இதையே வேறுவிதமாகக் கூறினால்,

$\phi(x, y, z)$ என்ற எண்ணிச் சார்பின் மிகப் பெரிய திசை வகைக் கெழு செங்கோட்டுத் திசையில்தான் உண்டு. அதன் பெறுமானம் $|\nabla\phi|$ ஆகும்.

நிறுவல்

§ 38 (ஆ) குறிப்பிலிருந்து A என்ற வெகடர் திசையில் ϕ-ன் திசை வகைக் கெழு

$$\frac{d\phi}{da} = \nabla\phi \cdot \hat{\mathbf{A}} = |\nabla\phi| \mathbf{N} \cdot \hat{\mathbf{A}}$$

என்று அறிவோம்.

எனவே, இத் திசைவகைக்கெழு மிகப் பெரியதாக இருக்க வேண்டுமானால்,

$\mathbf{N} \cdot \hat{\mathbf{A}} = 1$, அதாவது $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{N}$ ஆகவேண்டும்.

இதிலிருந்து ϕ-ன் மிகப்பெரிய திசைவகைக் கெழு N திசையில் (அதாவது) ϕ-ன் செங்கோட்டுத் திசையில்தான் அமையும் என்றும், அப்போது மிகப்பெரிய திசைவகைக்கெழு $|\nabla\phi|$

செங்கோட்டுத் திசையில் உள்ள வகைக் கெழுவை $\frac{d\phi}{dn}$ என்று குறிப்பது மரபு

$$\text{எனவே, } \frac{d\phi}{dn} = |\nabla\phi| = \nabla\phi\cdot\mathbf{N} \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

மேலே விளக்கியவற்றிலிருந்து, ϕ-ன் மிகப் பெரிய மாறுவீத வெக்டர் $\nabla\phi$ என்று சுருக்கமாகக் கூறலாம்.

[குறிப்பு : (அ)-வில் உள்ள சமன்பாடு (1) ஐயும், (இ)-வில் உள்ள சமன்பாடு (2) ஐயும் இணைத்து நோக்கினால், $\Delta\phi = \frac{d\phi}{dn}\mathbf{N}$ என்ற பயன்தரும் விளைவு பெறப்படுகிறது.]

39. ஒரு வெக்டரின் பாய்வு (Divergence of a vector)

கொடுத்துள்ள ஒரு மண்டலத்தில் அமையும்

$$\mathbf{F} = \{F_1(x, y, z)\}\,\mathbf{i} + \{F_2(x, y, z)\}\,\mathbf{j} + \{F_3(x, y, z)\}\,\mathbf{k}$$

என்ற வெக்டர் களத்தின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் F-ன் வகைக் கெழு உண்டானால்,

$$\nabla\mathbf{F} \equiv \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k})$$

$$\equiv \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \equiv \sum\frac{\partial F_1}{\partial x}$$

என்ற எண்ணிச் சார்பு F-ன் பாய்வு அல்லது F-ன் டெல் புள்ளிப் பெருக்கி என்ற பெயர் பெறும்.

$\nabla\cdot\mathbf{F}$ என்பதை "பாய்வு F" அல்லது "div F" என்று எழுதுவதும் மொழிவதும் உண்டு.

[குறிப்பு: (1) F என்பது வெக்டர் சார்பு என்றால், $\nabla\cdot\mathbf{F}$ என்பது ஓர் எண்ணிச் சார்பு ஆகும்.

ϕ என்பது எண்ணிச் சார்பு என்றால், $\nabla\cdot\phi$ என்பதற்குப் பொருள் இல்லை.

(2) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$, ஆனால் $\nabla\cdot\mathbf{F} \neq \mathbf{F}\cdot\nabla$

மேலும், $\nabla\cdot\mathbf{F} = \sum \frac{\partial F_1}{\partial x}$

ஆனால், $\mathbf{F}\cdot\nabla = \left(\sum \mathbf{F}_1\,\mathbf{i}\right)\cdot\left(\sum \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum \mathbf{F}_1 \frac{\partial}{\partial x}$

$\therefore\ (\mathbf{F}\cdot\nabla)\,\mathbf{G} = \sum F_1 \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x}$

(3) $\nabla\cdot\mathbf{F}$ என்பதை $\mathbf{i}\cdot\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \mathbf{j}\cdot\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \mathbf{k}\cdot\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z}$

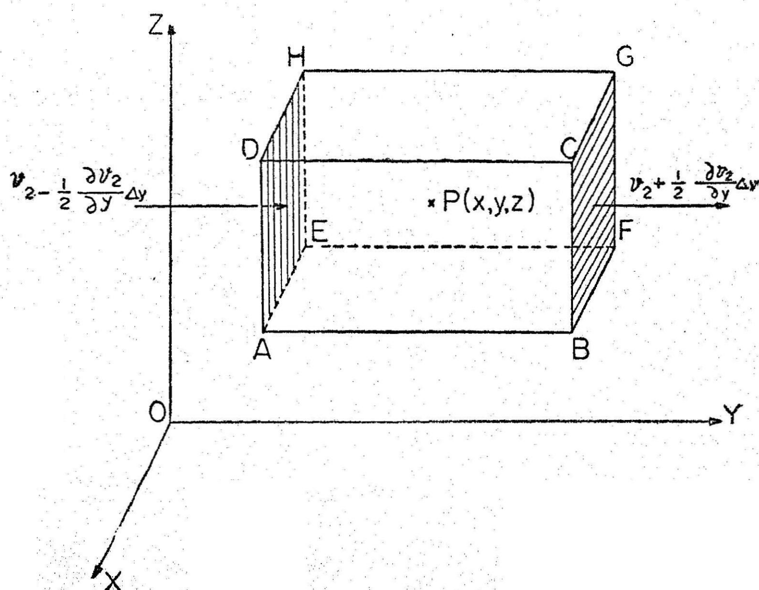
$$= \sum \mathbf{i}\cdot\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}$$

என்றும் எழுதலாம்.

(4) A, B என்பவை இரண்டு வெக்டர்கள் என்றால்,

$\nabla\cdot(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \nabla\cdot\mathbf{A} \pm \nabla\cdot\mathbf{B}$ (வெளிப்படை)]

§ 40. ஒரு வெக்டரின் பாய்வுக்குப் "பாய்பொருள் இயக்கவியல் (Fluid mechanics) விளக்கம் [B.E., 69]



படம்-37.

இயங்கிக் கொண்டிருக்கும் அழுந்திச் சுருக்க முடியாத (incompressible) பாய்பொருளின் (flnid) திசைவேகம், $P(x, y, z)$ என்ற புள்ளியில், $\mathbf{V}(x, y, z)$ என்ற வெக்டரால் குறிப்பிடப் பெறுகிறது என்போம்.

x^-, y^-, z^- திசைகளில் V-ன் கூறுகள் முறையே $v_1(x, y, z)$, $v_2(x, y, z)$, $v_3(x, y\ z)$ என்போம்.

பின்பு, $\mathbf{V} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$

P ஐ மையமாகவும், x^-, y^-, z^- அச்சுகளுக்கு இணையாகவும் முறையே $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ அலகுகள் உடைய விளிம்புகளைக் கொண்ட இணைகரத்தின் மத் தனிமம் (Parallelopiped element) ஒன்றை எடுத்துக் கொள்வோம் [படம்–37].

திசைவேகம் V-ன் y திசைக்கூறு (component in the y-direction), P என்ற புள்ளியில் $v_2(x, y, z)$ என்பதால்,

$AEHD$ என்ற முகத்தில் (face) V-ன் y-திசைக் கூறு

$$= v_2\left(x, y - \frac{1}{2}\Delta y, z\right)$$

$$\simeq v_2(x, y, z) - \frac{1}{2}\,\frac{\partial v_2(x, y, z)}{\partial y}\cdot \Delta y$$

(டெய்லர் தேற்றத்தின்படி)

அதுபோலவே, $BFGC$ என்ற முகத்தில் V-ன் y-திசைக் கூறு

$$= v_2\left(x, y + \frac{1}{2}\Delta y, z\right)$$

$$\simeq v_2(x, y, z) + \frac{1}{2}\,\frac{\partial v_2(x, y\ z)}{\partial y}\cdot \Delta y$$

∴ $AEHD$ முகத்தைக் கடந்து ஓர் அலகு நேரத்தில் இணைகரத் திண்மத்தின் உள்ளே செல்லும் பாய்பொருளின் கன அளவு

= ($AEHD$-ன் பரப்பு)×[$AEHD$-ன் ⊥ திசையில் (அதாவது) y-திசையில் திசைவேகக் கூறு.]

$$= \Delta x \Delta z\left(v_2 - \frac{1}{2}\,\frac{\partial v_1}{\partial y}\Delta y\right) \quad \ldots \quad (1)$$

இவ்வாறே, $BFGC$ முகத்தைக் கடந்து ஓர் அலகு நேரத்தில் இணைகரத் திண்மத்தின் வெளியே செல்லும் பாய்பொருளின் கன அளவு

$$= \Delta x \Delta z\left(v_2 + \frac{\partial v_2}{\partial y}\Delta y\right) \quad \ldots \quad (2)$$

∴ y-திசையில், ஓர் அலகு நேரத்தில், இணைகரத் திண்மத்தில் நுழைந்து வெளியேறுவதால் இழந்த பாய்பொருளின் கன அளவு

$$= (2) - (1)$$
$$= \frac{\partial v_2}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

அதேபோல் z-அச்சுத் திசையிலும், x-அச்சுத் திசையிலும் ஓர் அலகு நேரத்தில் இழந்து பாய்பொருளின் கன அளவு முறையே

$$\frac{\partial v_3}{\partial z} \Delta x \ \Delta y \ \Delta z, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x} \Delta x \ \Delta y \ \Delta z \text{ ஆகும்.}$$

இணைகரத்தின் கன அளவு $= \Delta x \ \Delta y \ \Delta z$

ஆதலால், ஓர் அலகு நேரத்தில் ஓர் அலகு கன அளவுள்ள இணைகரத் திண்மத்தில் நுழைந்து வெளியேறுவதால் இழந்த பாய்பொருளின் மொத்த கன அளவு

$$= \frac{\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right)}{\Delta x \ \Delta y \ \Delta z}$$
$$= \frac{\partial v_1}{\partial n} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$
$$= \Delta \cdot V$$

[குறிப்பு (1) : P என்ற புள்ளியில் மூலம் (source) அல்லது உறிஞ்சி (sink) இல்லை என்றால், அழுத்திச் சுருக்க முடியாத பாய்பொருள் அந்த இணைகரத் திண்மத்தில் சென்று வெளியேறுவதால், கன அளவில் கூடுதலோ (gain) அல்லது இழப்போ (loss) இருக்க முடியாது.

எனவே, $$\boxed{\nabla \cdot V = 0}$$

இந்தச் சமன்பாட்டை "அழுத்திச்சுருக்க முடியாத பாய் பொருளின் தொடர்ச்சிச் சமன்பாடு" (Equation of continuity of an incompressible fluid) என்று கூறுவர்.

(3) ஒரு வெக்டரின் பாய்வு பூச்சியம் (zero) என்றால், அந்த வெக்டரை சாலினாய்டல் அல்லது பாய்விலா வெக்டர் (solenoidal vector) என்பர்.

(4) மேற்கூறிய விளக்கங்கள் மின் பெருக்கு (electric flux) காந்தப் பெருக்கு (magnetic flux), மற்றும் வெப்பப் பெருக்கு (heat flux) வெக்டர்களுக்கும் பொருந்தும்.]

§ 41. ஒரு வெக்டரின் சுழல் (Curl of a vector)

கொடுத்துள்ள ஒரு மண்டலத்தில் அமையும்

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \{F_1(x, y, z)\}\mathbf{i} + \{F_2(x, y, z)\}\mathbf{j} + \{F_3(x, y, z)\}\mathbf{k}$$

என்ற வெக்டர் களத்தின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் F-ன் வகைக்கெழு உண்டென்றால்

$$\nabla \times \mathbf{F} \equiv \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (F_1\,\mathbf{i} + F_2\,\mathbf{j} + F_3\,\mathbf{k})$$

$$\equiv \left(\sum \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\right) \times \left(\sum F_1\,\mathbf{i}\right)$$

$$\equiv \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

என்ற வெக்டர் சார்பு F-ன் சுழல் அல்லது F-ன் டெல் குறுக்குப் பெருக்கி என்ற பெயர் பெறும்.

$\nabla \times \mathbf{F}$ என்பதை, "சுழல் F" அல்லது "curl F" என்று சொல்வதும் எழுதுவதும் மரபு.

[குறிப்பு (1): மேற்கண்ட விளக்கத்தில் அமைந்துள்ள அணிக்கோவையை (determinant) முதல்நிரை (first row) வழியாகத்தான் விரித்தல் வேண்டும். எனவே,

$$\nabla + \mathbf{F} \equiv \left(\frac{\partial \mathbf{F}_3}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{F}_3}{\partial x}\right)\mathbf{j}$$

$$+ \left(\frac{\partial \mathbf{F}_3}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$\equiv \sum \left(\frac{\partial \mathbf{F}_3}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial z}\right)\mathbf{i}$$

(2) F ஒரு வெக்டர் சார்பெனில், $\nabla \times \mathbf{F}$ என்பது ஒரு எண்ணிச் சார்பெனில், $\nabla \times \phi$ என்பது பொருளற்றது.

(3) $$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \mathbf{j} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z}$$

என்றும் எழுதலாம்.

(4) $\nabla \times (\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{B}]$

§ 42. ஒரு வெக்டரின் சுழலுக்கு நிலை இயக்க வியல் (Mechanics) விளக்கம் (B.E. '69, '72)

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருள் (rigid body) ஒரு நிலையான அச்சைப் பற்றி ω ஆரையன்/விநாடி என்ற கோணத்திசை வேகத்தில் சுழல்வதை Ω என்ற ஒரு வெக்டரால் குறிக்கும் முறையையும், அந்தக் கட்டிறுக்கப் பொருளில், நிலைவெக்டர் R ஆக உடைய ஏதாவதொரு புள்ளி P-ன் திசைவேக வெக்டர் V என்றால்

$$\mathbf{V} = \Omega \times \mathbf{R}$$

என்ற சமன்பாட்டையும் நாம் § 18·2-ல் அறியலானோம்.

$\mathbf{R} = xi + yj + zR$, $\Omega = \omega_1 \mathbf{i} + \omega_2 \mathbf{j} + \omega_3 \mathbf{R}$ என்று வைத்துக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad \mathbf{V} = \Omega \times \mathbf{R} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{R} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= (\omega_2 z - \omega_3 y)\,\mathbf{i} + (\omega_3 x - \omega_1 y)\,\mathbf{j} + (\omega_1 y - \omega_2 x)\,\mathbf{R}$$

$$= \Sigma\,(\omega_2 z - \omega_3 y)\,\mathbf{i}$$

இப்போது,

$$\nabla \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{R} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \omega_2 z - \omega_3 y & \omega_3 x - \omega_1 z & \omega_1 y - \omega_2 x \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(\omega_1 y + \omega_2 x) - \frac{\partial}{\partial z}(\omega_3 x - \omega_1 z)\right]$$

$$+ \mathbf{j}\left[\frac{\partial}{\partial z}(\omega_2 z - \omega_3 y) - \frac{\partial}{\partial x}(\omega_1 y - \omega_2 x)\right]$$

$$+ \mathbf{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\omega_3 x - \omega_1 z) - \frac{\partial}{\partial y}(\omega_2 z - \omega_3 y)\right]$$

$$= (\omega_1 + \omega_1)\,\mathbf{i} + (\omega_2 + \omega_2)\,\mathbf{j} + (\omega_3 + \omega_3)\,\mathbf{R}$$

$$= 2(\omega_1\,\mathbf{i} + \omega_2\,\mathbf{j} + \omega_3\,\mathbf{R})$$

அதாவது, $\nabla \times \mathbf{V} = 2\,\Omega$

$$\therefore \quad \Omega = \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{V}$$

எனவே, ஒரு புள்ளியின் கோணத் திசைவேகம் அந்தப் புள்ளியின் திசைவேக வெக்டரின் சுழலில் பாதியாகும்.

[குறிப்பு : ஒரு வெக்டரின் சுழல் பூச்சியம் என்றால், அந்த வெக்டர் சுழலிலா (irrotational) வெக்டர் என்றும் அல்லது காப்பு நிலை (conservative) வெக்டர் என்றும் வழங்கப்படும்.]

§ 43. டெல் செயலிச் சூத்திரங்கள் (Formulae connected with the ∇ operator)

ϕ என்பது ஓர் எண்ணிச் சார்பு.

A, B என்பவை வெக்டர் சார்புகள்

(1) $\nabla\cdot(\phi\,\mathbf{A}) = (\nabla\phi)\cdot\mathbf{A} + \phi\,(\nabla\,\mathbf{A})$

(2) $\nabla\times(\phi\,\mathbf{A}) = (\nabla\phi)\times\mathbf{A} + \phi\,(\nabla\times\mathbf{A})$

(3) $\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$

(4) $\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\,\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\,\mathbf{B}$

(5) $\nabla\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\,\mathbf{A} + (\mathbf{A}\cdot\nabla)\,\mathbf{B} + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) + \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})$

(6) $\nabla\cdot(\nabla\phi) = \nabla^2\phi \equiv \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial\phi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$

(7) $\nabla\times(\nabla\phi) = 0$

(8) $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = 0$

(9) $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla\,(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$

நிறுவல் :

$$\mathbf{A} = A_1\,\mathbf{i} + A_2\,\mathbf{j} + A_3\,\mathbf{k} = \Sigma A_1\,\mathbf{i}$$

$$\mathbf{B} = B_1\,\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\,\mathbf{k} = \Sigma B_1\,\mathbf{i}$$

என்று கொள்வோம்.

(1) $\nabla\cdot(\phi\mathbf{A}) = (\nabla\phi)\cdot\mathbf{A} + \phi\,(\nabla\cdot\mathbf{A})$ (B. E. '69)

இப்போது, $\phi\mathbf{A} = \Sigma\,\phi\,A_1\,\mathbf{i}$

$$\therefore\quad \nabla\cdot(\phi\,\mathbf{B}) = \sum\left\{\frac{\partial}{\partial x}(\phi A)\right\}$$

$$= \sum\left\{\phi\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial x}A_1\right\}$$

$$= \phi\sum\frac{\partial A_1}{\partial x} + \left(\sum\frac{\partial\phi}{\partial x}\,\mathbf{i}\right)\cdot(\Sigma A_1\,\mathbf{i})$$

$$= \phi\,(\nabla\cdot\mathbf{A}) + (\nabla\phi)\cdot\mathbf{A}$$

$$= (\nabla\phi)\cdot\mathbf{A} + \phi\,(\nabla\cdot\mathbf{A})$$

(௨) $\nabla+(\phi\,\mathbf{A}) = (\nabla\phi)\times\mathbf{A} + \phi\,(\nabla\times\mathbf{A})$

[B.E., '64, Kerala '68, M.Sc., '73]

$$\nabla\times(\phi\,\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \phi A_1 & \phi A_2 & \phi A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \sum\left\{\frac{\partial}{\partial y}(\phi A_3) - \frac{\partial}{\partial z}(\phi\,A_2)\right\}\mathbf{i}$$

$$= \sum\left\{\left(\phi\frac{\partial A_3}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial y}A_3\right) - \left(\phi\frac{\partial A_2}{\partial z} + \frac{\partial\phi}{\partial z}A_2\right)\right\}\mathbf{i}$$

$$= \phi\sum\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \sum\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}A_3 - \frac{\partial\phi}{\partial z}A_1\right)\Big\}\,\mathbf{i}$$

$$= \phi(\nabla \times \mathbf{A}) + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \phi(\nabla \times \mathbf{A}) + (\nabla \phi)\, \mathbf{A}$$

(3) $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$

[B.E., '64, Kerala '65]

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \Sigma(A_2 B_3 - A_3 B_2)\, \mathbf{i}$$

$$\therefore \quad \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \left(\sum \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x}\right) \cdot \left\{\sum (A_2 B_3 - A\right.$$

$$= \sum \frac{\partial}{\partial x} (A_2 B_3 - A_3 B_2)$$

$$= \sum \left\{\left(A_2 \frac{\partial B_3}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial x} B_3\right) - \left(A_3 \frac{\partial B_2}{\partial x} + \frac{\partial A_3}{\partial x} B_2\right)\right\}$$

$$= \sum \left\{\frac{\partial A_2}{\partial x} B_3 - \frac{\partial A_3}{\partial x} B_2\right\} - \sum\left(\frac{\partial B_2}{\partial x} A_3 - \frac{\partial B_3}{\partial x} A_2\right)$$

$$= \left\{\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} B_3 - \frac{\partial A_3}{\partial x} B_2\right) + \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} B_1 - \frac{\partial A_1}{\partial y} B^3\right)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} B_2 - \frac{\partial A_2}{\partial z} B_1\right)\right\}$$

$$- \left\{\left(\frac{\partial B_2}{\partial x} A_3 - \frac{\partial B_3}{\partial x} A_2\right) + \left(\frac{\partial B_3}{\partial y} A_1 - \frac{\partial B_1}{\partial y} A_3\right)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial B_1}{\partial z} A_2 - \frac{\partial B_2}{\partial z} A_1\right)\right\}$$

இப்போது, பெரிய அடைப்புகளில் உள்ள கோவைகளைத் தனித்தனியே மாற்றியமைத்தால்,

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\left\{B_1\left(\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)+B_2\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x}\right)+B_3\left(\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\right\}$$

$$-\left\{A_1\left(\frac{\partial B_3}{\partial y}-\frac{\partial B_2}{\partial z}\right)+A_2\left(\frac{\partial B_1}{\partial z}-\frac{\partial B_3}{\partial x}\right)+A_3\left(\frac{\partial B_2}{\partial x}-\frac{\partial B_1}{\partial y}\right)\right\}$$

$$=(\Sigma B_1\,\mathbf{i})\cdot\left\{\sum\left(\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\mathbf{i}\right\}-(\Sigma A_1\,\mathbf{i})\cdot\left\{\sum\left(\frac{\partial B_3}{\partial y}-\frac{\partial B_2}{\partial z}\right)\mathbf{i}\right\}$$

$$=\mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A})-\mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$$

$$\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}-(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}+\mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B})-\mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A})$$

(Kerala '65, BSc. App. Sc. '73)

(உ

என்பது ஒரு வெக்டரைக் குறித்தால்,

$$\nabla\times\mathbf{F}=\mathbf{i}\times\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial x}+\mathbf{j}\times\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial y}+\mathbf{k}\times\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial z}$$

(§ 41 குறிப்பு 4)

$$\therefore\ \nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{i}\times\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})+\mathbf{j}\times\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})+\mathbf{k}\times\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$$

$$=\mathbf{i}\times\left\{\mathbf{A}\times\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial x}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}\times\mathbf{B}\right\}+\mathbf{j}\times\left\{\mathbf{A}\times\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial y}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y}\times\mathbf{B}\right\}+\mathbf{k}\times\left\{\mathbf{A}\times\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial z}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y}\times\mathbf{B}\right\}$$

§ 23·1-ல்

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}$$

என்று பார்த்தோம்.

$$\begin{aligned}
\therefore\quad \nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) &= \left(\mathbf{i}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial x}\right)\mathbf{A} - (\mathbf{i}\cdot\mathbf{A})\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial x} \\
&\quad + (\mathbf{i}\cdot\mathbf{B})\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x} - \left(\mathbf{i}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}\right)\mathbf{B} \\
&\quad + \left(\mathbf{j}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial y}\right)\mathbf{A} - (\mathbf{j}\cdot\mathbf{A})\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial y} \\
&\quad + (\mathbf{j}\cdot\mathbf{B})\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y} - \left(\mathbf{j}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y}\right)\mathbf{B} \\
&\quad + \left(\mathbf{k}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial z}\right)\mathbf{A} - (\mathbf{k}\cdot\mathbf{A})\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial z} \\
&\quad + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{B})\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z} - \left(\mathbf{k}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z}\right)\mathbf{B}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\mathbf{i}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial x} + \mathbf{j}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial y} + \mathbf{k}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial z}\right)\mathbf{A} \\
&\quad - \left(\mathbf{i}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x} + \mathbf{j}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y} + \mathbf{k}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z}\right)\mathbf{B} \\
&\quad + (\mathbf{B}\cdot\mathbf{i})\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x} + (\mathbf{B}\cdot\mathbf{j})\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y} + (\mathbf{B}\cdot\mathbf{k})\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z} \\
&\quad - \left\{(\mathbf{A}\cdot\mathbf{i})\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial x} + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{j})\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial y} + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{k})\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial z}\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\nabla\cdot\mathbf{B})\mathbf{A} - (\nabla\cdot\mathbf{A})\mathbf{B} \\
&\quad + \mathbf{B}\cdot\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{A} \\
&\quad - \mathbf{A}\cdot\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{B}
\end{aligned}$$

$$= (\nabla\cdot\mathbf{B})\mathbf{A} + (\nabla\cdot\mathbf{A})\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}$$

$$= (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A})$$

(§ 39-ல் குறிப்புகளைப் பார்க்கவும்)

$$(5)\quad \nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}+(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) + \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})$$

$$\mathbf{B}\times(\nabla\mathbf{A}) + \mathbf{A}\times(\nabla\ \mathbf{B})$$

$$= \nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) - (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}$$

என்று நிறுவுவோம்.

$$\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \mathbf{B}\times\left(\mathbf{i}\times\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x} + \mathbf{j} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y} + \mathbf{k}\times\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z}\right)$$

இதில், $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\ \mathbf{B}-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\ \mathbf{C}$ என்ற தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தினால்

$$\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \left(\mathbf{B}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}\right)\mathbf{i}-(\mathbf{B}\cdot\mathbf{i})\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x} + \left(\mathbf{B}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y}\right)\mathbf{j}-(\mathbf{B}\cdot\mathbf{j})\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y} + \left(\mathbf{B}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z}\right)\mathbf{k}-(\mathbf{B}\cdot\mathbf{k})\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z}$$

$$= \left(\mathbf{B}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(\mathbf{B}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y}\right)\mathbf{j} + \left(\mathbf{B}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z}\right)\mathbf{k} - \left\{\mathbf{B}\cdot\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right\}\mathbf{A}$$

$$\therefore\quad \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \left(\mathbf{B}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(\mathbf{B}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y}\right)\mathbf{j} + \left(\mathbf{B}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z}\right)\mathbf{k} - (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} \quad \ldots \quad (i)$$

இதுபோலவே,

$$\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) = \left(\mathbf{A}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(\mathbf{A}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial y}\right)\mathbf{j} + \left(\mathbf{A}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial z}\right)\mathbf{k} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} \quad \ldots \quad (ii)$$

(i), (ii) சமன்பாடுகளைக் கூட்டினால்

$$\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) + \mathbf{A}\times(\nabla+\mathbf{B})$$

$$= \left(\mathbf{A}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial x} + \mathbf{B}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \left(\mathbf{A}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y} + \mathbf{B}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y}\right)\mathbf{j} + \left(\mathbf{A}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial z} + \mathbf{B}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z}\right)\mathbf{k} - (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}\cdot-(\mathbf{A}-\nabla)\mathbf{B}$$

$$= \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) + \mathbf{j}\,\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) + \mathbf{k}\,\frac{\partial}{\partial a}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$$

$$- (\mathbf{B}\cdot\nabla)\,\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\,\mathbf{B}$$

$$= \nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) - (\mathbf{B}\cdot\nabla)\,\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\,\mathbf{B}.$$

(6) $\nabla\cdot(\nabla\phi) = \nabla^2\phi \equiv \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$

$$\nabla\cdot(\nabla\phi) = \left(\sum \mathbf{i}\,\frac{\partial}{\partial x}\right)\cdot\left(\sum \mathbf{i}\,\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

$$= \nabla^2\phi$$

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

என்ற வகைக்கெழுச் செயலியை லாப்லாசியன் செயலி (Laplacian Operator) அல்லது சுருக்கமாக லாப்லாசியன் என்று வழங்குவர்.

(7) $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = 0$ [B.E. '69, Kerala '66, '68]

$$\nabla\times\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \sum \mathbf{i}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)$$

$$\therefore\ \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 A_3}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 A^2}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial y\partial x}$$

$$+ \frac{\partial^2 A_2}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2 A}{\partial z\,\partial y}$$

$$= 0$$

இந்தச் சூத்திரத்தை,

Div curl A = 0 அல்லது,

பாய்வு சுழல் A = 0

என்று நினைவிற் கொள்ளலாம்.

(8) $\nabla \times (\nabla \phi) - 0$ [BE '69 Kerala '66]

$$\nabla \phi = \mathbf{i}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial \phi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\therefore \quad \Delta \times (\nabla \phi) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y}\right) - \mathbf{j}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}\right)$$

$$= 0$$

இந்தச் சூத்திரத்தை

curl grad $\phi = 0$ அல்லது

சுழல் வாட்டம் $\phi = 0$

என்று நினைவில் கொள்ளலாம்.

(9) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ [B. E. '66]

$$\nabla \times \mathbf{A} = \sum \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\mathbf{i}$$

$$\therefore \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{j} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} & \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} & \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$= \left\{\left(\frac{\partial^2 A_2}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial z\,\partial x}\right)\right\} \mathbf{i}$$

$$+ \left\{\left(\frac{\partial^2 A_3}{\partial y\,\partial y} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial x\partial y}\right)\right\} \mathbf{j}$$

$$+ \left\{\left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial x^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 A_3}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial y\partial z}\right)\right\} \mathbf{k}$$

$$= \left\{\left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial x\partial y}\right) - \left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2}\right)\right\} \mathbf{i}$$

$$+ \left\{\left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial y\partial z}\right) - \left(\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2}\right)\right\} \mathbf{j}$$

$$+ \left\{\left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial z\partial x} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial z\partial y} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial z^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 A_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial z^2}\right)\right\} \mathbf{k}$$

$$= \left\{ \mathbf{i}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} - \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) - \nabla^2 (A_1\,\mathbf{i})\right\}$$

$$+ \left\{ \mathbf{j}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) - \nabla^2 (A_2\,\mathbf{j})\right\}$$

$$+ \left\{ \mathbf{k}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) \nabla^2 - (A_3\mathbf{k})\right\}$$

$$= \left(\sum \mathbf{i}\,\frac{\partial}{\partial x}\right)(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2 (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})$$

$$= \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$$

§ 44. பாய்விலா (சாலினுய்டல்) மற்றும் சுழலிலா வெக்டர் களம் (Solenoidal and irrotational vector field)

(i) V என்ற வெக்டரின் பாய்வு (divergence) பூச்சியம் என்ருல்,

$$\nabla\cdot\mathbf{V} = 0 \qquad \dots \quad (1)$$

V ஐப் பாய்விலா (solinoidal) வெக்டர் என்கிறேம்.

F என்பது ஒரு வெக்டர் என்ருல்

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0 \qquad \ldots (2)$$

என்று அறிவோம். [§ 43 (8)]

(1), (2) சமன்பாடுகளை ஒப்பிட்டு நோக்கிஞல்

$$\mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{F} \qquad \ldots (3)$$

என்ற தொடர்பு கிடைக்கிறது.

இதை, அடியில் வருமாறு விளக்கலாம் :

எந்த ஒரு பாய்விலா வெக்டரையும் மற்ருெரு வெக்டரின் சுழலாக எழுதலாம்,

(ii) இப்போது, வெக்டர் V–ன் சுழல் பூச்சியம் என்போம்.

$$\therefore \quad \nabla \times \mathbf{V} = 0 \qquad \ldots (4)$$

V ஐச் சுழலிலா (irrotational) வெக்டர் அல்லது காப்புநிலை (conservative) வெக்டர் என்பர்.

$\phi (x, y, z)$ என்பது ஓர் எண்ணிச் சார்பு என்ருல், § 43 (1)-லிருந்து

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0 \qquad \ldots (5)$$

(4), (5) சமன் பாடுகளிலிருந்து

$$\mathbf{V} = \nabla \phi \qquad \ldots (6)$$

எனவே,

எந்த ஒரு சுழலிலா (அல்லது காப்பு நிலை) வெக்டரையும் ஒரு எண்ணிச் சார்பின் வாட்டமாக எழுதலாம்.

இந்த எண்ணிச் சார்பு, எண்ணி நிலைப்பண்பு (scalar potential) என்ற பெயர் பெறும்.

(iii) V என்பது பாய்விலாததும் சுழலிலாததுமான ஒரு வெக்டர் எனக் கொள்வோம்,

V சுழலிலா வெக்டர் என்பதால்

$$\mathbf{V} = \nabla \phi \qquad \ldots (7)$$

மேலும், அது பாய்விலா வெக்டர் என்பதால்

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

$$\therefore \quad \nabla \cdot (\nabla \phi) = 0 \qquad [(7)\text{-லிருந்து}]$$

$$\therefore \quad \nabla^2 \phi = 0$$

சமன்பாடு (8) ஐ லாப்லாஸ் (Laplace) சமன்பாடு என்பர்.

எனவே,

பாய்விலாததும் சுழலிலாததுமான ஒரு வெக்டரின் எண்ணி நிலைப்பண்பு, லாப்லாஸ் சமன்பாட்டைச் செய்யும்.

மறுதலையாக (conversely)

$\phi(x, y, z)$ என்ற எண்ணிச் சார்பு லாப்லாஸ் சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு என்றால், $\nabla\phi$ என்பது பாய்விலாததும் சுழலிலாததுமான ஒரு வெக்டரைக் குறிக்கும்.

மாதிரிக்கணக்கு (1)

$\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad r = |\mathbf{R}|$ என்றால்

(i) ∇r (ii) $\nabla\left(\frac{1}{r}\right)$

(iii) $\nabla (\log r)$ (iv) ∇r^n

ஆகியவற்றைக் காண்க.

$$r = |\mathbf{R}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

(i)
$$\nabla r = \sum \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$$

$$= \sum \mathbf{i} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$$

$$= \sum \mathbf{i} \frac{x}{r} = \frac{1}{r} \sum x\mathbf{i} = \frac{\mathbf{R}}{r}$$

(ii)
$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2} \nabla r \qquad [\S\, 37 \text{ குறிப்பு } 3]$$

$$= -\frac{1}{r^2} \frac{\mathbf{R}}{r} = -\frac{\mathbf{R}}{r^3}$$

(iii)
$$\nabla (\log r) = \frac{1}{r} \nabla r$$

$$= \frac{1}{r} \frac{\mathbf{R}}{r} = \frac{\mathbf{R}}{r^2}$$

(iv) $\nabla \; r^n \; = nr^{n-1} \; \nabla r$

$$= n\, r^{n-1} \frac{\mathbf{R}}{r} = n\, r^{n-2}\, \mathbf{R}$$

மாதிரிக்கணக்கு (2)

முப்பரிமாண வெளியில் உள்ள (x, y, z) என்ற புள்ளியில் வெப்ப நிலை $T = xy+yz+zx$ $(1, 1, 1)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து எந்தத் திசையில் T-ன் மிகப் பெரிய மாறுவீதம் உள்ளது? அந்த மிகப் பெரிய மாறுவீதத்தைக் கணக்கிடுக. [B.E., '63]

T-ன் மிகப் பெரிய மாறுவீதம் உள்ள திசை ∇T-ன் திசை யாகும்.

இப்போது, $\nabla T = \sum \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} (xy + yz + zx)$

$$= (y+z)\,\mathbf{i} + (z+x)\,\mathbf{j} + (x+y)\,\mathbf{k}$$

$(1, 1, 1)$ என்ற புள்ளியில்

$$\nabla T = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k} = 2\,(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

∴ மிகப் பெரிய மாறுவீதம் உள்ள திசையின் திசை விகிதங்கள் $(1, 1, 1)$ ஆகும்.

மிகப் பெரிய மாறு வீதம் $= |\nabla T|$

$$= |2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}|$$

$$= \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}$$

மாதிரிக்கணக்கு (3)

$2xz^2 - 3xy - 4x = 7$ என்ற வளைபரப்பில் $(1, -1, 2)$ புள்ளியில் அமையும் தொடுதளம் (tangent plane) காண்க.

$\phi \equiv 2xy^2 - 3xy - 4x - 7$ என்போம்.

$$\nabla \phi = \sum \mathbf{i} \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$= (2z^2 - 3y - 4x)\,\mathbf{i} - 3x\,\mathbf{j} + 4xz\,\mathbf{k}$$

என்பது அந்த வளைபரப்புக்கு, (x, y, z) என்ற புள்ளியில் அமையும் செங்கோட்டு வெக்டர் ஆகும்.

$\therefore$ $P_0\,(1, -1, 2)$ என்ற புள்ளியில் அமையும் செங்கோட்டு வெக்டர்,

$$N_0 = 7i - 3j - 8k$$

0 என்னும் ஆதியைக் குறித்து P_0-ன் நிலை வெக்டர்

$$R_0 = i - j + 2k$$

தொடு தளத்தில் உள்ள ஏதாவதொரு புள்ளி $P\,(x, y, z)$-ன் நிலைவெக்டர்

$$R = xi + yj + zk$$

இப்போது, $\overrightarrow{PP_0} \perp N_0$

$$\therefore \quad (R - R_0) \cdot N_0 = 0$$

அதாவது $\{(x-1)i + (y+1)j + (z-2)k\} \cdot (7i - 3j + 3k) = 0$

அதாவது $7(x-1) - 3(y+1) + 8(z-2) = 0$

எனவே, தொடுதளத்தில் சமன்பாடு

$7x - 3y + 8z = 26$ ஆகும்.

மாதிரிக்கணக்கு (4)

$(2, -1, 2)$ என்ற புள்ளியில், $2i - 3j + 6k$ என்ற வெக்டர் திசையில் $\phi(x, y, z) = 4xz^3 - 3x^2y^2z$ என்ற எண்ணிச்சார்பின் திசை வகைக்கெழு காண்க.

$A = 2i - 3j + 6k$ என்றால்,

$$\hat{A} = \frac{2i - 3j + 6k}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = \frac{1}{7}(2i - 3j + 6k)$$

$$\nabla\phi = \sum i \frac{\partial\phi}{\partial x}$$

$$= (4z^3 - 6xy^2z)i - 6x^2yzj + (12xz^2 - 3x^2y^2)k$$

$(2, -1, 2)$ என்ற புள்ளியில்

$$\nabla\phi = 8j + 48j + 84k$$

∴ A திசையில் ϕ-ன் திசை வகைக்கெழு

$$= (\nabla\phi) \cdot \hat{A} \qquad [\S 38\ (ஆ)]$$

$$= (8\,i + 4\,zj + 84\,k) \cdot \frac{(2\,i - 3\,j + 6k)}{7}$$

$$= \frac{16 - 144 + 504}{7}$$

$$= \frac{376}{7}$$

மாதிரிக்கணக்கு (5)

$\phi\ (x, y, z)$ என்ற எண்ணிச் சார்பில்

$$\phi\,(1, -2, 2) = 4$$

$\nabla\phi = 2\,x\,y\,z^3\,i + x^2\,z^3 + 3\,x^2\,y\,z^2\,k$ என்றால், $\phi\ (x, y, z)$ காண்க.

$$\nabla\,\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\,i + \frac{\partial\phi}{\partial y}\,j + \frac{\partial\phi}{\partial z}\,k$$

$$= 2\,xyz^3\,i + x^2\,z^3\,j + 3\,x^2y\,z^2\,k$$

$$\therefore\quad \frac{\partial\phi}{\partial x} = 2\,xyz^3 \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = x^2\,z^3$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = 3\,x^2\,y\,z^2$$

இந்த மூன்று சமன்பாடுகளையும் முறையே x, y, z-களைக் குறித்துப் பகுதி தொகையிடல் (partial integration) செய்தால்)

$\phi = x^2\,y\,z^3 + x$ இல்லாத உறுப்பு

$\phi = x^2\,y\,z^3 + y$ இல்லாத உறுப்பு

$\phi = x^2\,y\,z^3 + z$ இல்லாத உறுப்பு

இவற்றிலிருந்து

$$\phi = x^2yz^3 + C \quad (C \text{ ஏதாவதொரு மாறிலி})$$

என்று தெளிவாகிறது.

ஆனால், $\phi\,(1, -2, 2) = 4$

$$\therefore\quad 4 = 1^2\,(-2)\,2^3 + C$$

$$\therefore\quad C = 20$$

எனவே, $\phi\,(x, y, z) = x^2yz^3 + 20$

மாதிரிக்கணக்கு (6)

$\mathbf{R} = x\mathbf{j} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{R}|$ எனில் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(அ) $\nabla\cdot\mathbf{R} = 3$, (ஆ) $\nabla\cdot(r^3\mathbf{R}) = 6r^3$ (இ) $\nabla\left(\dfrac{\mathbf{R}}{r^3}\right) = 0$
[B.Sc. App. Sc. '73]
[Kerala' '68]

(அ) $$\nabla\cdot\mathbf{R} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z)$$
$$= 1 + 1 + 1 = 3$$

(ஆ) $\nabla\cdot(\phi\mathbf{A}) = (\nabla\phi)\cdot\mathbf{A} + \phi(\nabla\cdot\mathbf{A})$ [§ 43 (1)

$$\therefore \nabla\cdot(r^3\mathbf{R}) = (\nabla r^3)\cdot\mathbf{R} + (r^3)\mathbf{R}$$
$$= 3r^2\,\nabla r\cdot\mathbf{R} + (r^3)^3$$
$$= 3r^2\,\frac{\mathbf{R}}{r}\cdot\mathbf{R} + 3r^3$$
$$= 3r^2\,\frac{r^2}{r} + 3r^3$$
$$= 6r^3$$

(இ) $$\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{R}}{r^3}\right) = \left(\nabla\frac{1}{r^3}\right)\cdot\mathbf{R} + \frac{1}{r^3}(\nabla\cdot\mathbf{R})$$
$$= -3r^{-4}(\triangle r)\cdot\mathbf{R} + \frac{1}{r^3}(3)$$
$$= -\frac{3}{r^4}\,\frac{\mathbf{R}}{r}\cdot\mathbf{R} + \frac{3}{r^3}$$
$$= -\frac{3}{r^4}\,\frac{r^2}{r} + \frac{3}{r^3}$$
$$= -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3}$$
$$= 0$$

மாதிரிக்கணக்கு (7)

$\mathbf{F} = (x + 3y)\mathbf{i} + (y - 2z)\mathbf{j} + (x + az)\mathbf{k}$ என்பது ஒரு பாய்விலா வெக்டர் எனில். a என்ற எண்ணின் மதிப்பு யாது?

$\mathbf{F}$ பாய்விலா வெக்டர் என்பதால் $\nabla\cdot\mathbf{F} = 0$

அதாவது, $\dfrac{\partial}{\partial x}(x+3y) + \dfrac{\partial}{\partial y}(y-2z) + \dfrac{\partial}{\partial z}(x+az) = 0$

$\therefore \quad 1 + 1 + a = 0$

$\therefore \quad a = -2$

மாதிரிக்கணக்கு (8)

ϕ, ψ என்பவை எண்ணிச் சார்புகளெனில்,

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) = \phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi$$

[B. E. '68, Kerala '68]

A ஒரு வெக்டர் சார்பு என்றால்

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = (\nabla \phi) \cdot \mathbf{A} + \phi (\nabla \cdot \mathbf{A})$$

இப்போது, $\nabla \psi$ ஒரு வெக்டராகும்.

$$\therefore \quad \nabla \cdot (\phi \nabla \psi) = (\nabla \phi) \cdot (\nabla \phi) + \phi \{ \nabla \cdot (\nabla \psi) \}$$

$$= (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi) + \phi \nabla^2 \psi \qquad \ldots \quad (1)$$

அதேபோன்று,

$$\nabla \cdot (\psi \nabla \phi) = (\nabla \psi) \cdot (\nabla \phi) + \psi \nabla^2 \phi \qquad \ldots \quad (2)$$

(1)-லிருந்து (2) ஐக் கழித்தால்

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) = \phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi$$

$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ என்றால்,

மாதிரிக்கணக்கு (9)

(i) $\nabla^2 \left(\dfrac{1}{r} \right)$ (ii) $\nabla^2 r^n$

ஆகியவற்றைக் கணக்கீடு செய்க.

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ என்பதால், அது $\mathbf{R} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ என்ற வெக்டரின் பெருமானம் என்று அறிகிறோம்.

$$\text{(i)} \quad \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = \nabla \cdot \left(\nabla \frac{1}{r} \right)$$

$$= \nabla \cdot \left\{ -\frac{1}{r^2} \nabla r \right\}$$

$$= \nabla \cdot \left\{ -\frac{1}{r^2}\frac{\mathbf{R}}{r} \right\} \text{[மாதிரிக்கணக்கு(1)]}$$

$$= -\nabla \cdot \left\{ \frac{\mathbf{R}}{r^3} \right\}$$

$$= 0 \qquad \text{[மாதிரிக்கணக்கு (6)]}$$

(ii) $$\nabla^4 r^n = \nabla \cdot (\nabla r^n)$$

$$= \nabla \cdot (nr^{n-1} \; \nabla r)$$

$$= \nabla \cdot \left(n\, r^{n-1} \frac{\mathbf{R}}{r} \right)$$

$$= n\, \nabla \cdot (r^{n-2}\, \mathbf{R})$$

$$= n\, \{ (\nabla r^{n-2}) \cdot \mathbf{R} + r^{n-2} (\nabla \cdot \mathbf{R}) \}$$

[§ 43 (1)]

$$= n\{ (n-2)\, r^{n-3}\, (\nabla r) \cdot \mathbf{R} + r^{n-2}\, (3) \}$$

$$= \left\{ (n-2)\, r^{n-2} \frac{\mathbf{R}}{r} \cdot \mathbf{R} + 3\; r^{n-2} \right\}$$

$$= n\{ (n+1) r^{n-2} \}$$

$$= n(n+1) r^{n-2}$$

மாதிரிக்கணக்கு (10)

$\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{R}|$ எனில்,

(i) $\nabla \times \mathbf{R}$ (ii) $\nabla \times \{ f(r) \mathbf{R} \}$

[B.Sc. App. Sc. '78]

ஆகியவை பூச்சிய வெக்டர்கள் என்று காண்பிக்கவும்.

(இங்கே $f(r)$ என்பது r-ன் ஏதாவதொரு சார்பு.)

(i) $$\nabla \times \mathbf{R} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= \left\{ \frac{\partial}{\partial y}(z) - \frac{\partial}{\partial z}(y) \right\} \mathbf{i} + \left\{ \frac{\partial}{\partial z}(x) - \frac{\partial}{\partial x}(z) \right\} \mathbf{j} + \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(y) - \frac{\partial}{\partial y}(x) \right\} \mathbf{k}$$

$$= 0 + 0 + 0$$

$$= 0$$

(ii) $f(r)$ என்பது ஓர் எண்ணிச் சார்பு$=\phi$ எனக் குறித்தால்,

$$\therefore \quad \nabla \times \{ f(r)\,\mathbf{R} \} = \nabla \times (\phi \mathbf{R})$$

$$= (\nabla\phi) \times \mathbf{R} + \phi(\nabla \times \mathbf{R}) \qquad [\text{p } 43\ (2)]$$

$$= \{ \nabla f(r) \} \times \mathbf{R} + f(r)\{ 0 \}$$

$$= f'(r)(\nabla r) \times \mathbf{R} + 0$$

$$= f'(r)\frac{\mathbf{R}}{r} \times \mathbf{R}$$

$$= \frac{f'(r)}{r}(0)$$

$$= 0$$

மாதிரிக்கணக்கு (11)

$\mathbf{F} = e^x \{ (2y + 3z)\ \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \}$ என்பது சுழலிலா வெக்டர் என்று காண்பிக்கவும். மேலும், $\mathbf{F} = \nabla\phi$ என்று அமையுமாறு $\phi(x, y, z)$ என்ற எண்ணிச் சார்பு (அதாவது) F-ன் எண்ணி நிலைப்பண்பு (scalar potential) காண்க. [B E. '64]

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^x(2y+3z) & 2e^x & 3e^x \end{vmatrix}$$

$$= (0-0)\,\mathbf{i} - (3e^x - 3e^x)\,\mathbf{j} + (2e^x - 2e^x)\,\mathbf{k}$$

$$= 0$$

$\therefore$ **F சுழலிலா வெக்டர்**

$\nabla\phi = F$ எனில்

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k} = e^x(2y + 3z)\,\mathbf{i} + 2e^x\,\mathbf{j} + 3e^x\,\mathbf{k}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial\phi}{\partial x} = e^x(2y + 3z)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = 2e^x, \quad \frac{\partial\phi}{\partial z} = 3e^x$$

இம் மூன்று சமன்பாடுகளை முறையே x, y, z-களைக் குறித்துப் பகுதித் தொகையிடல் (partial integration) செய்தால்

$$\phi = e^x (2y+3z) + x \text{ இல்லாத கோவை}$$
$$\phi = 2e^x y \qquad + y \text{ இல்லாத கோவை}$$
$$\phi = 3\, e^x z \qquad + z \text{ இல்லாத கோவை}$$

எனவே, $\phi = e^x (2y + 3z) + C$ (C மாறிலி)

மாதிரிக்கணக்கு (12)

$v = |\mathbf{V}|$ என்றால்

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} = \tfrac{1}{2}\nabla v^2 - \mathbf{V}\times(\nabla\times\mathbf{V})$$

என்று நிறுவுக.

$$\mathbf{V}\times(\nabla \times \mathbf{V}) = \tfrac{1}{2}\nabla v^2 - (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V}$$

என்று நிறுவுவோம்.

$$\mathbf{V}\times(\nabla \times \mathbf{V}) = \mathbf{V} \times \left\{ \mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + \mathbf{j} \times \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + \mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \right\}$$

$$= \left(\mathbf{V}\cdot\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x}\right)\mathbf{i} - (\mathbf{V}\cdot\mathbf{i})\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x}$$
$$+ \left(\mathbf{V}\cdot\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y}\right)\mathbf{j} - (\mathbf{V}\cdot\mathbf{j})\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y}$$
$$+ \left(\mathbf{V}\cdot\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}\right)\mathbf{k} - (\mathbf{V}\cdot\mathbf{k})\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \quad [\S\ 23\ (1)]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left\{ \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}) \right\}\mathbf{i} + \left\{ \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}) \right\}\mathbf{j} + \left\{ \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}) \right\}\mathbf{k} \right]$$
$$- \left\{ \mathbf{V}\cdot\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \right) \right\}\mathbf{V}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\mathbf{i}\frac{\partial v^2}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial v^2}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial v^2}{\partial z} \right] - (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}$$

$$= \frac{1}{2}\nabla v^2 - (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}$$

மாதிரிக்கணக்கு (13)

$$\mathbf{A} = 2yz\,\mathbf{i} - x^2 y\,\mathbf{j} + xz^2\,\mathbf{k},$$

$\phi = 2x^2 y z^3$ என்றால்

(அ) $(\mathbf{A}\cdot\nabla)\phi$, (ஆ) $\mathbf{A}\cdot(\nabla\phi)$, (இ) $(\mathbf{A}\times\nabla)\phi$, (ஈ) $\mathbf{A}\times(\nabla\phi)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

(அ) $(\mathbf{A}.\nabla)\phi = \left(\mathbf{A}\cdot\sum \mathbf{i}\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\phi$

$$= \left(2yz\frac{\partial}{\partial x} - x^2 y\frac{\partial}{\partial y} + xz^2\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi$$

$$= 2yz\frac{\partial}{\partial x}(2x^2yz^3) - x^2y\frac{\partial}{\partial y}(2x^2yz^3) + xz^2\frac{\partial}{\partial z}(2x^2yz^3)$$

$$= 2yz(4xyz^3) - x^2y(2x^2z^3) + xz^2(6x^2yz^2)$$

$$= 8xy^2z^4 - 2x^4yz^3 + 6x^3yz^4$$

(ஆ) $\mathbf{A}\cdot(\nabla\phi) = \mathbf{A}\cdot\left\{\mathbf{i}\dfrac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{j}\dfrac{\partial\phi}{\partial y} + \mathbf{k}\dfrac{\partial\phi}{\partial z}\right\}$

$$= (2yz\,\mathbf{i} - x^2y\,\mathbf{j} + xz^2\,\mathbf{k})\cdot(4xyz^3\,\mathbf{i} + 2x^2z^3\,\mathbf{j} + 6x^2yz^2\,\mathbf{k})$$

$$= 8xy^2z^4 - 2x^4yz^3 + 6x^3yz^4$$

(இ) $(\mathbf{A}\times\nabla)\phi$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2yz & -x^2y & xz^2 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}\phi$$

$$= \left\{\mathbf{i}\left(-x^2y\frac{\partial\phi}{\partial z} - xz^2\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) + \mathbf{j}\left(xz^2\frac{\partial\phi}{\partial x} - 2yz\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) + \mathbf{k}\left(2yz\frac{\partial\phi}{\partial y} + x^2y\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\right\}$$

$$= \mathbf{i}\{-x^2y(6x^2yz^2) - xz^2(2x^2z^3)\}$$
$$+ \mathbf{j}\{xz^2(4xyz^3) - 2yz(6x^2yz^2\}$$
$$+ \mathbf{k}\{2yz(2x^2z^3) + x^2y(4xyz^3)\}$$
$$= -(6x^4y^2z^2 + 2x^3z^5)\mathbf{i} + (4x^2yz^5 - 12x^2y^2z^3)\mathbf{j}$$
$$+ (4x^2yz^4 + 4x^3y^2z^3)\mathbf{k}$$

(ஈ) $$\mathbf{A}\times(\nabla\phi) = \mathbf{A}\times\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2yz & -x^2y & xz^2 \\ 4xyz^3 & 2x^2z^3 & 6x^2yz^2 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}(-6x^4y^2z^2 - 2x^3z^5) - \mathbf{j}(12x^2y^2z^3 - 4x^2yz^5)$$
$$+ \mathbf{k}(4x^2yz^4 + 4x^2y^2z^3)$$
$$= -(6x^4y^2z^2 + 2x^3z^5)\mathbf{i} + (4x^2yz^5 - 12x^2y^2z^5)\mathbf{j}$$
$$+ (4x^2yz^4 + 4x^3y^2z^3)\mathbf{k}$$

[குறிப்பு : (அ), (ஆ) ஆகியவற்றிலிருந்து

$$(\mathbf{A}\cdot\nabla)\phi = \mathbf{A}\cdot(\nabla\phi)$$

என்று அறிகிறோம். எனவே $\mathbf{A}\cdot\nabla\phi$ என்பதற்கு $(\mathbf{A}\cdot\nabla)\phi$ என்றோ அல்லது $\mathbf{A}\cdot(\nabla\phi)$ என்றோ பொருள் கொண்டாலும் அதன் மதிப்பு ஒன்றே என்று தெளிவாகிறது.

இதே போன்ற விளக்கம் (இ), (ஈ) ஆகியவற்றிலிருந்தும் பெறலாம்.]

மாதிரிக்கணக்கு (14)

$$\mathbf{A} = 2yz\,\mathbf{i} - x^2y\,\mathbf{j} + xz^2\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{B} = x^2\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} - xy\,\mathbf{k}$$ எனில்,

(அ) $(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}$ என்பதைக் கணக்கீடு செய்க.

(ஆ) $\mathbf{B}\cdot(\nabla\mathbf{A})$ என்பதற்கு விளக்கம் உண்டா ?

(அ) $$(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} = \left(\mathbf{B}\cdot\sum \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{A}$$
$$= x^2\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x} + yz\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y} - xy\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z}$$

$$= x^2(-2xy\,\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}) + yz(2z\,\mathbf{i} - x^2\mathbf{j}) - xy(2y\,\mathbf{i} + 2xz\,\mathbf{k})$$

$$= (2yz^2 - 2xy^2)\,\mathbf{i} - (2x^3y + x^2yz)\,\mathbf{j} + (x^2z^2 - 2x^2yz)\,\mathbf{k}$$

(ஆ) $\nabla \equiv \sum \mathbf{i}\,\dfrac{\partial}{\partial x}$ என்பதால்

$$\nabla \mathbf{A} = \sum \mathbf{i}\,\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}$$

$$= \mathbf{i}\,(-2xy\,\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}) + \mathbf{j}\,(2z\,\mathbf{i} - x^2\mathbf{j}) + \mathbf{k}\,(2y\,\mathbf{i} + 2xz\,\mathbf{k})$$

§ **44·1** இதுவரை, $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1$, $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = 0$ (புள்ளிப் பெருக்கி)

$\mathbf{i}\times\mathbf{i} = 0$, $\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}$ (வெக்டர் குறுக்குப் பெருக்கி)

என்று அறிந்து கொண்டிருக்கிறோம்.

ஆனால், புள்ளிப் பெருக்கியும் வெக்டர் குறுக்குப் பெருக்கியும் அல்லாத ii, ij போன்ற பெருக்கியை நாம் விளக்கவில்லை.[1] ஆகவே $\nabla\mathbf{A}$ என்பதற்குத் தற்போது விளக்கம் தர இயலாது. $\mathbf{B}\cdot(\nabla\mathbf{A})$ என்பதற்கும் விளக்கம் இல்லை. எனவே, $\mathbf{B}\cdot\nabla\mathbf{A}$ என்று எழுதினால், இனி $(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}$ என்று பொருள் கொள்ளவேண்டும்.

பயிற்சி — 5

(1) அடியில் காணும் ϕ என்னும் எண்ணிச் சார்புகளுக்குக் கொடுத்துள்ள புள்ளிகளில் அமையும் வாட்டங்களையும், அலகு செங்கோட்டு வெக்டர்களையும் காண்க :

(அ) $\phi = 3x^2y - y^3z^2$, $(1, -2, -1)$ என்ற புள்ளியில்,

(ஆ) $\phi = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, $(1, -1, 2)$ என்ற புள்ளியில்

(இ) $\phi = x^2y + 2xz - 4$, $(2, -2, 3)$ என்ற புள்ளியில்

(2) (a) $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ திசையில் $(1, -1, 3)$ என்ற புள்ளியில் $\phi = 2xy + z^2$ என்ற சார்புக்கும்,

(b) $2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ திசையில் $(1, -2, -1)$ என்ற புள்ளியில் $\phi = x^2yz + 4xz^2$ என்ற சார்புக்கும் திசை வகைக் கெழு காண்க.

---

[1] ii, ij, ik, ki, ji, .. iii, ijk, போன்ற கணியங்களை டயட்கள் (dyads) என்று கூறுவர். இவற்றைப் பொதுமைப்படுத்தி டென்சார்கள் (tensors) என்ற புதிய கணியங்களைப் பெறலாம்.

(3) (2, 1, — 1) என்ற புள்ளியில் $x^2y\,z^3$ என்பதன் திசை வகைக்கெழு எந்தத் திசையில் மிகப் பெரியதாக இருக்கும்? அந்த மிகப் பெரிய திசை வகைக்கெழு யாது?

(4) $xy=z^2$ என்ற வளைபரப்பிற்கு (1, 4, 2), (—3, —3, 3) என்ற இரண்டு புள்ளிகளில் அமையும் செங்கோடுகளுக்கு இடையில் உள்ள கோணம் யாது?

(5) $\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{R}|$ என்போம். $\phi(1) = 0$ மற்றும் $\nabla\phi(r) = \dfrac{\mathbf{R}}{r^5}$ என்றால், $\phi(r)$ ஐக் காண்க.

(6) (அ) $\nabla\phi = (x + 2y + 4z)\mathbf{i} + (2x - 3y - z)\mathbf{j} + (4x - y + 2z)\mathbf{k}$ என்றால், $\phi(x, y, z)$ ஐக் காண்க.

(ஆ) $\triangle\phi = (y^2 - 2xyz^3)\mathbf{i} + (3 + 2xy - x^2z^3)\mathbf{j} + (6z^3 - 3x^2yz^2)\mathbf{k}$ என்றால், $\phi(x, y, z)$ ஐக் காண்க.

(7) $\mathbf{A} = (6xy + z^3)\mathbf{i} + (3x^2 - z)\mathbf{j} + (3xz^2 - y)\mathbf{k}$ என்பது ஒரு சுழலிலா வெக்டர் என நிறுவுக. மேலும், $A =$ வாட்டம் f என்று அமையுமாறு $f(x, y, z)$ என்ற எண்ணிச் சார்பைக் காண்க. [B. E. '66, Kerala '68]

(8) $\mathbf{V} = (x + 2y + \alpha z)\mathbf{i} + (\beta x - 3y - z)\mathbf{j} + (4x + \gamma y + 2z)\mathbf{k}$

என்பது ஒரு சுழலிலா வெக்டர் என்றால், α, β, γ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க. $\mathbf{V}$ ஐ ஓர் எண்ணிச் சார்பின் வாட்டமாக எழுதுக. [Kerala '67]

(9) (2, —1, 2) என்ற புள்ளியில் $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x^2 + y^2 - z = 3$ என்ற இரு வளைபரப்புகளுக்கிடையே உள்ள கோணம் யாது?

(10) $\mathbf{A}$ ஒரு மாறுத வெக்டர், மற்றும் $\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ எனில், $\nabla(\mathbf{R}\cdot\mathbf{A}) = A$ என்று நிறுவுக.

(11) $\phi = 2x^3y^2z^4$ என்றால், $\nabla\cdot(\nabla\phi)$ ஐக் காண்க.

(12) கீழ்க்காணும் வெக்டர்களின் பாய்வையும், சுழலையும் காண்க :

(அ) $\mathbf{F} = (x \cos z)\mathbf{i} + (y \log x)\mathbf{j} - z^2 \mathbf{k}$

(ஆ) $\mathbf{A} = 3xyz^2 \mathbf{i} + 2xy^3 \mathbf{j} - x^2yz\mathbf{k}$
$(1, -1, 1)$ என்ற புள்ளியில்

(இ) $\mathbf{F} = \Sigma(x^2 + yz)\mathbf{i}$ [Kerala '67]

(ஈ) $\mathbf{F} = (2z - 3y)\mathbf{i} + (3x - z)\mathbf{j} + (y - 2x)\mathbf{k}$ [B.E., '64]

(13) $\mathbf{A} = \{y \cos(2x+y^2)\}\mathbf{i} - \{\cos(2x+y)\}\mathbf{j}$
$\mathbf{B} = x^2y\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$ எனில், A-ன் பாய்வு, B-ன் சுழல் ஆகியவற்றைக் காண்க. [B.E., '66]

(14) $\mathbf{A} = 3xyz^2\mathbf{i} + 2xy^3\mathbf{j} + x^2yz\mathbf{k}$, $\phi = 3x^2 - yz$ என்றால் $(1, -1, 1)$ என்ற புள்ளியில்

(அ) $\nabla\cdot\mathbf{A}$, (ஆ) $\mathbf{A}\cdot\nabla\phi$, (இ) $\nabla\cdot(\phi\mathbf{A})$, (ஈ) $\nabla\cdot\nabla\phi$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

(15) $\mathbf{A} = (x+y+1)\mathbf{i} + \mathbf{j} - (x+y)\mathbf{k}$ எனில், $\mathbf{A}\cdot$(சுழல் $\mathbf{A}) = 0$ என்று காட்டுக.

(16) $\phi = 3x^2y$ மற்றும் $\psi = xz^2 - 2y$ எனில், $\nabla(\nabla\phi\cdot\nabla\psi)$ ஐக் காண்க.

(17) $\mathbf{R} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{R}|$ மற்றும்
$\phi = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ என்றால்,

(அ) $\mathbf{R}\cdot(\nabla\phi)$, (ஆ) $\nabla\cdot\{f(r)\mathbf{R}\}$

ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக. (இங்கே $f(r)$ என்பது r-ன் ஏதாவதொரு சார்பு.)

(18) $\phi = xy + yz + zx$, $\mathbf{A} = x^2y\mathbf{i} + y^2z\mathbf{j} + z^2x\mathbf{k}$ என்றால், $(3, -1, 2)$ என்ற புள்ளியில் $\mathbf{A}\cdot(\nabla\phi)$, $A\times(\nabla\phi)$ ஆகியவற்றைக் காண்க. [B.E. '65]

(19) $f = x^2yz$, $g = xy - 3z^2$ என்ற எண்ணிச் சார்புகளுக்கு $\nabla(\nabla f\cdot\nabla g)$ காண்க. [B.E. '66]

(20) கணக்கு 16-ல் கொடுத்துள்ள சார்புகளைக் கொண்டு

$$\nabla^2(\phi\psi) = \phi\,\nabla^2\psi + 2(\nabla\phi)\cdot(\nabla\psi) + \psi\,\nabla^2\phi$$

என்ற தேற்றத்தைச் சரிபார்க்கவும்.

(21) $\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{R}|$ எனில்,

(a) $\nabla^2 f(r) = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2}\{f(r)\} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\{f(r)\}$

என்று நிறுவுக. [$f(r)$ என்பது r-ன் ஏதாவதொரு சார்பு.]

(b) $f(r) = A + \dfrac{B}{r}$ (A, B மாறிலிகள்) என்றால்

$\nabla^2 f(r) = 0$ என்று நிறுவுக.

(22) $\mathbf{A} = 2xz^2\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + 3xz^3\mathbf{k}$, $\phi = x^2yz$ எனில், $(1, 1, 1)$ என்ற புள்ளியில்

(அ) $\nabla\times\mathbf{A}$, (ஆ) $\nabla\times(\phi\mathbf{A})$, (இ) $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})$,

(ஈ) $\nabla\{\mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{A})\}$, (உ) $\nabla\times(\phi\nabla\phi)$

ஆகியவற்றைக் காண்க.

(23) $\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ மற்றும் $\mathbf{A}$ ஒரு மாரு வெக்டர் என்றால் $\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{R}) = 0$ என்று காண்பிக்கவும்.

(24) (a) $\mathbf{F} = \nabla(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ எனில், $\nabla\cdot\mathbf{F}$, $\nabla\times\mathbf{F}$ காண்க.

(b) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ என்ற வளைபரப்பின் மேல் உள்ள எந்தப் புள்ளியில் அமையும் செங்கோடு $x-$, $y-$, $z-$ அச்சுகளிலிருந்து சமகோணத்தில் இருக்கும்? [M. Sc. '73]

(25) ϕ, ψ என்பவை எண்ணிச் சார்புகளானால்,

(i) $\Delta\times(\phi\nabla\phi) = 0$ [B. E. '64, '66]

(ii) $\nabla\times(\phi\nabla\psi) = \nabla\phi\times\nabla\psi = -\nabla\times(\psi\nabla\phi)$

என்று நிறுவுக.

(26) $\mathbf{A} = yz^2\mathbf{i} - 3xz^2\mathbf{j} + 2xyz\mathbf{k}$

$\mathbf{B} = 3x\mathbf{i} + 4z\mathbf{j} - xy\mathbf{k}$

$\phi = xyz$ என்றால்,

(அ) $\mathbf{A} \times (\nabla\phi)$ (ஆ) $(\mathbf{A}\times \nabla)\phi$

(இ) $(\nabla\times\mathbf{A}) \times \mathbf{B}$ (ஈ) $\mathbf{B}\cdot \nabla \times \mathbf{A}$

ஆகியவற்றைக் காண்க.

(27) **A**, **B** என்ற இரண்டும் சுழலிலா வெக்டர்கள் என்றால், $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ ஒரு பாய்விலா வெக்டர் என்று நிறுவுக.

(28) $\mathbf{A} = x^2z\,\mathbf{i} + yz^3\,\mathbf{j} - 3xy\,\mathbf{k}$

$\mathbf{B} = y^2\,\mathbf{i} - yz\,\mathbf{j} + 2x\,\mathbf{k}$, $\phi = 2x^2 + yz$ என்றால்,

(அ) $\mathbf{A}\cdot(\nabla\phi)$ (ஆ) $(\mathbf{A}\cdot\nabla)\phi$

(இ) $(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}$ (ஈ) $(\nabla\cdot\mathbf{A})\mathbf{B}$ காண்க.

(29) $\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ மற்றும் **A** ஏதாவதொரு வெக்டர் என்றால்,

(i) $(\mathbf{A}\times\nabla)\times\mathbf{R} = -2\mathbf{A}$ என நிறுவுக.

(ii) $(\mathbf{A}\times\nabla):\mathbf{R}$-ன் மதிப்பு யாது?

(30) $\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{R}|$ மற்றும் **A** ஒரு மாறு வெக்டர் என்றால்

(i) $$\nabla\times\left(\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{R}}{r}\right) = \frac{\mathbf{A}}{r} + \left(\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{R}}{r^3}\right)\mathbf{R}$$

(ii) $$\nabla\times\left(\frac{\mathbf{R}\times\mathbf{A}}{r^3}\right) = \nabla\left(\mathbf{A}\cdot\frac{\mathbf{R}}{r^3}\right)$$ [B.E., '65]

என நிறுவுக.

(31) **F** என்பது ஒரு பாய்விலா வெக்டர் எனில், சுழல் சுழல் சுழல் சுழல் $\mathbf{F} = \nabla^2\nabla^2\mathbf{F} = \nabla^4\mathbf{F}$ என்று நிறுவுக.

(32) $\mathbf{R} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{R}|$, மற்றும் $f(r)\mathbf{R}$ என்பது பாய்விலா வெக்டர் களத்தைக் குறித்தால் $f(r)$ காண்க. [M.Sc., '73]

(33) லாப்லாஸ் சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு $\phi(x, y, z)$ என்றால், $\nabla\phi$ என்பது ஒரு பாய்விலாததும் சுழலிலாததுமான (both solenoidal and irrotational) ஒரு வெக்டர் ஆகும் என்று காண்பிக்கவும். [B.E., '70]

விடைகள்

(1) (அ) வாட்டம் $= -12\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 16\mathbf{k}$;

$$N = \frac{1}{\sqrt{481}}(-12\mathbf{i}-9\mathbf{j}-16\mathbf{k})$$

(ஆ) வாட்டம் $= 9\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 15\mathbf{k}$;

$$N = \frac{1}{\sqrt{315}}(9\mathbf{i}-3\mathbf{j}+15\mathbf{k})$$

(இ) வாட்டம் $= -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$;

$$N = \frac{1}{3}(-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$$

(2) (a) $\frac{14}{3}$ (b) $\frac{37}{3}$

(3) $-4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$ திசையில்; $4\sqrt{11}$

(4) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{22}}\right)$ (5) $\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{r^3}\right)$

(6) (அ) $\frac{x^2}{2} - \frac{3y^2}{2} + z^2 + 2xy + 4xz - yz + c$

(ஆ) $xy^2 - x^2yz^3 + 3y + \frac{3}{2}z^4 + c$

(7) $3x^2y + xz^3 - yz + c$

(8) $\alpha = 4,\ \beta = 2,\ \gamma = -1$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}y^2 + z^2 + 2xy + 4xz - yz + c$$

(9) $\cos^{-1}\left(\frac{8\sqrt{21}}{63}\right)$

(11) $12xy^2z^4 + 4x^3z^4 + 24x^3y^2z^2$

(12) (அ) $\nabla\cdot\mathbf{F} = \cos z + \log x - 2z$

$$\nabla\times\mathbf{F} = (-x\sin z)\,\mathbf{j} + \frac{y}{x}\,\mathbf{k}$$

(ஆ) $\nabla\cdot\mathbf{A} = 4$; $\nabla\times\mathbf{A} = -\mathbf{i} - 8\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

(இ) $\nabla\cdot\mathbf{F} = 2x + 2y + 2z$; $\nabla\times\mathbf{F} = 0$

(ஈ) $\nabla\cdot\mathbf{F} = 0$; $\nabla\times\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

(13) $\nabla . \mathbf{A} = -2y \sin(2x + y^2) + \sin(2x + y)$

$\nabla + \mathbf{A} = (2y - x^2)\,\mathbf{k}$

(14) (அ) 4, (ஆ) −15, (இ) 1, (ஈ) 6

(16) $(6yz^2 - 12x)\,\mathbf{i} + 6xz^2\,\mathbf{j} + 12\,xyz\,\mathbf{k}$

(17) (அ) $3(x^3 + y^3 + z^3 - 3\,xyz)$

(ஆ) $3f(r) + rf'(r)$

(18) $25\,;\ -56\,\mathbf{i} + 30\,\mathbf{j} - 47\,\mathbf{k}$

(19) $(4xyz - 6x^2z)\,\mathbf{j} + (2xy^2 + x^3 - 6x^2y)\,\mathbf{k}$

(22) (அ) $\mathbf{i} + \mathbf{j}$, (ஆ) $5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 4\,\mathbf{k}$,

(இ) $5\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{k}$, (ஈ) $-2\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + 8\,\mathbf{k}$, (உ) 0

(24) (a) $6x + 6y + 6z\,;\ 0$

(b) $\left(\dfrac{a^2}{\Sigma a^2},\ \dfrac{b^2}{\Sigma a^2},\ \left(\dfrac{c^2}{\Sigma a^2}\right)\right.$

(26) (அ) $-5x^2yz^2\,\mathbf{i} + xy^2z^2\,\mathbf{j} + 4xyz^3\,\mathbf{k}$

(ஆ) (அ)-ல் உள்ளதே.

(இ) $16z^3\,\mathbf{i} + (8x^2yz - 12xz^2)\,\mathbf{j} + 32xz^2\,\mathbf{k}$

(ஈ) $24x^2z + 4xyz^2$

(28) (அ) $4x^3z + yz^4 - 3xy^2$

(ஆ) (அ)-ல் உள்ளதே.

(இ) $2y^2z^3\,\mathbf{i} + (3xy^2 - yz^4)\,\mathbf{j} + 2x^2z\,\mathbf{k}$

(ஈ) $(2xy^2z + y^2z^3)\,\mathbf{i} - (2xyz^2 + yz^4)\,\mathbf{j} + (4x^2z + 2xz^3)\,\mathbf{k}$

(29) (ii) 0

(32) $f(r) = Ar^3$ (A மாறிலி).

6. வெக்டர் தொகையிடல்

(Vector Integration)

§ **45.** ஒரே மாறியைச் சார்ந்துள்ள வெக்டரின் தொகை

$$\mathbf{F}(t) = \{F_1(t)\}\,\mathbf{i} + \{F_2(t)\}\,\mathbf{j} + \{F_3(t)\}\,\mathbf{k}$$

என்பது t என்னும் ஒரே மாறியைச் சார்ந்துள்ள வெக்டர் சார்பு என்று கொள்வோம்.

$\frac{d}{dt}\{\mathbf{S}(t)\} = \mathbf{F}(t)$ என அமையுமாறு, t என்ற ஒரே மாறியைச் சார்ந்த மற்றொரு வெக்டர் சார்பு $\mathbf{S}(t)$ உண்டெனில், $\{\mathbf{S}(t) + \mathbf{C}\}$ என்பது $\mathbf{F}(t)$-ன் வரையறுத் தொகை (indefinite integral) எனக் கூறப்படும். (இங்கே $\mathbf{C}$ ஏதாவதொரு மாறு வெக்டர்.)

இதைக் குறியீட்டு முறையில்,

$$\int \mathbf{F}(t)\,dt = \mathbf{S}(t) + \mathbf{C}$$

என்று எழுதலாம்.

t-க்கு a முதல் b வரை படும் $\mathbf{F}(t)$-ன் வரையறுத்த தொகையானது (definite integral),

$$\int_a^b \mathbf{F}(t)\,dt = [\mathbf{S}(t) + \mathbf{C}]_{t=a}^{b} = \mathbf{S}(b) - \mathbf{S}(a)$$

என்ற குறிப்பிட்ட ஒரு மாருத வெக்டர் (some particular constant vector) ஆகும்.

[குறிப்பு :

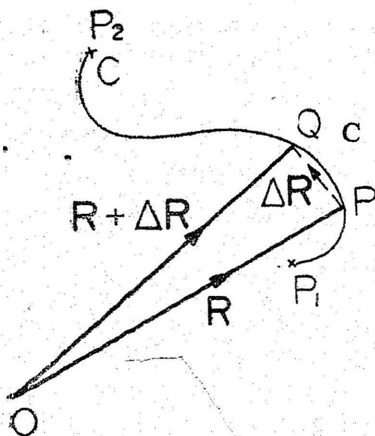
$$(1)\ \int_a^b \mathbf{F}(t)\, dt = \mathbf{i} \int_a^b F_1(t)\, dt + \mathbf{j} \int_a^b F_2(t)\, dt + \mathbf{k} \int_a^b F_3(t)\, dt$$

$$(2)\quad \int_a^b F_1(t)\, dt, \quad \int_a^b F_2(t)\, dt, \quad \int_a^b F_3(t)\, dt$$

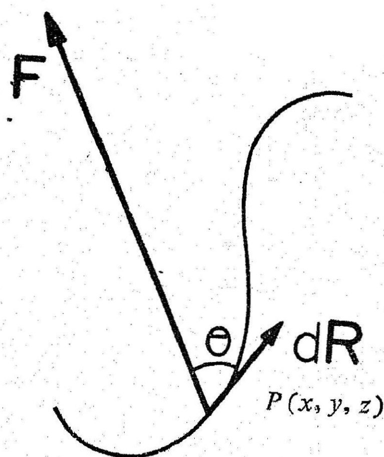
என்பவை ரீமானியன் (Riemannian) தொகைகளாகும்.]

§ 46. கோட்டுவழித் தொகை (Line Integral)

P_1 என்ற புள்ளியில் தொடங்கி P_2 என்ற புள்ளியில் முடியும் C என்ற கொடுத்துள்ள ஒரு முப்பரிமாண வளைகோட்டின்மேல் அமையும் $P(x, y, z)$ என்னும் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் $\mathbf{F}(x, y, z)$ என்ற வெக்டர்களும் உண்டு எனக் கொள்வோம்.



படம்-38.



படம்-39.

O என்ற ஆதியைக் குறித்து $P(x, y, z)$-ன் நிலைவெக்டர் $\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

$Q(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ என்ற அடுத்துள்ள புள்ளியின் நிலைவெக்டர் $\mathbf{R}+\Delta\mathbf{R}$ என்றால், $\overrightarrow{PQ} = \Delta\mathbf{R}$

இப்போது, Q என்ற புள்ளி C-ன் மேல் இயங்கி P ஐ அணுகும் போது, $\overrightarrow{PQ} = \Delta\mathbf{R} \simeq d\mathbf{R}$

இந்த $d\mathbf{R}$ என்ற வெக்டர் P ல் தொடும் தொடுகோட்டுத் திசையில் உள்ளது. (§ 29)

எனவே, $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$ என்பது $d\mathbf{R}$ திசையில் (அதாவது P-ன் தொடுகோட்டுத் திசையில்) $\mathbf{F}$-ன் கூறு (component) மற்றும் $d\mathbf{R}$-ன் பெறுமானம் ஆகிய இரண்டு எண்கணியங்களைப் பெருக்கி வந்த எண்ணி மதிப்புக்குச் சமம் ஆகும்.

(அதாவது) $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = |\mathbf{F}|\ |d\mathbf{R}| \cos\theta$ [படங்கள் 38, 39]

$P(x, y, z)$ என்ற புள்ளி C என்ற வளைகோட்டில் நகரும் போது, $\mathbf{F}$, $d\mathbf{R}$ ஆகிய வெக்டர்கள் (பெறுமானத்திலும், திசையிலும்) மாறிக் கொண்டு வரும். எனவே, $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$-ன் மதிப்பும் P-ன் நிலைக்கேற்ப (position) மாறும்.

இந்த நகரும் புள்ளி P-யானது, P_1-லிருந்து தொடங்கி C-ன் மேல் நகர்ந்துகொண்டே P_2 வந்து சேரும் வரை கணக்கிடப் படும். $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$ என்பவற்றின் தொகையை C வழியாக P_1 முதல் P_2 வரை படும் $\mathbf{F}$-ன் வளைகோட்டு வழித் தொகை அல்லது சுருக்கமாகக் கோட்டு வழித் தொகை[1] (curvilinear or simply line integral) என்பர்.

இதை $\displaystyle\int_{\overline{P_1P_2}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$ அல்லது $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$

என்ற குறியீட்டு முறையில் எழுதுவது மரபு.

குறிப்பு (1): $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{F}_1(x, y, z)\,\mathbf{i}+\mathbf{F}_2(x, y, z)\,\mathbf{j} + \mathbf{F}_3(x, y, z)\,\mathbf{k}$ என்றால்,

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = (\mathbf{F}_1\mathbf{i}+\mathbf{F}_2\mathbf{j}+\mathbf{F}_3\mathbf{k})\cdot(\mathbf{i}dx+\mathbf{j}dy+\mathbf{k}dz)$$
$$= \mathbf{F}_1 dx + \mathbf{F}_2 dy + \mathbf{F}_3 dz$$

---

[1] வரைவழித் தொகை என்றும் கூறலாம்.

$$\therefore \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = \int_C \{ F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz \} \quad \ldots \quad (1)$$

இப்போது, C என்ற வளைகோடு

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$$

என்ற துணையலகு சமன்பாட்டால் குறிக்கப்படும்போது,

$$F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz = \phi(t)$$

என்ற வடிவம் பெறும். அப்போது கோட்டு வழித் தொகை

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = \int_{t_1}^{t_2} \phi(t)$$

என்னும் ரீமானியன் (வரையறுத்த) தொகையான வடிவம் பெறும்.

C என்ற வளைகோட்டின் கார்டீசியன் சமன்பாடு கொடுக்கப் பட்டாலும், (1) ஐ ஒரு ரீமானியன் (வரையறுத்த) தொகையாக மாற்றி எழுதலாம்.

(2) $\mathbf{F}$ என்பது ஒரு விசை வெக்டரைக் குறித்தால், ஒரு துகளை P–லிருந்து Q–க்கு நகர்த்துவதற்கு $\mathbf{F}$ என்ற விசை செய்த வேலை (work done) $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$ ஆகும்.

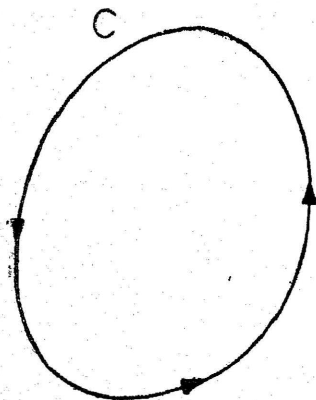
$$\left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\, ds = \mathbf{F}\cdot \frac{d\mathbf{R}}{ds}\, ds = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} \right)$$

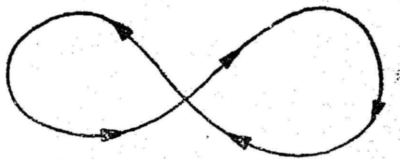
$\therefore \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$ என்பது அந்தத் துகள் P_1 என்ற புள்ளியிலிருந்து தொடங்கி C என்ற வளைகோட்டின்மேல் நகர்ந்து P_2 வந்து சேரும் வரை $\mathbf{F}$ என்ற விசை செய்த மொத்த வேலையைக் குறிக்கும்.

(3) P_1, P_2 என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் வளைகோட்டைப் பொறுத்து $\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$ என்பதன் மதிப்பு மாறும் என்பதை நன்கு உணரவேண்டும்.

(4) x-அச்சுக்கு மற்றும் y-அச்சுக்கு இணையாக வரையப் படும் கோடுகள் ஒரு மூடிய வளைகோட்டை இரண்டுக்கு மேற் படாத புள்ளிகளில் வெட்டினால், அந்த வளைகோட்டிற்கு எளிய

மூடிய வளைகோடு அல்லது சிக்கலற்ற (simple closed curve) என்று பெயர் (படம் 40). அப்படியல்லாத மூடிய வளைகோட்டிற்கு எளிமையற்ற அல்லது சிக்கலுடைய மூடிய வளைகோடு என்று பெயர் (படம் 41).





படம்-40

படம்-41.

(5) P என்னும் நகரும் புள்ளி C-என்னும் ஓர் எளிய மூடிய வளைகோட்டின்மேல் இடஞ்சுழியாக (anti-clockwise) ஒருமுறை சுற்றி வரும்போது கணக்கிடப்படும் $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$ என்பவற்றின் தொகையை $\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$ என்ற குறியீட்டால் குறிப்பது வழக்கம்.

பொதுவாக, $\oint_C \mathbf{F}\, d\mathbf{R} \neq 0$ என்றறிக.

(6) பாய்பொருள் இயக்கவியலில் (Fluid Mechanics) $\mathbf{V}$ என்பது பாய்பொருளின் திசைவேக வெக்டரைக் குறித்தால் $\oint_C \mathbf{V}\cdot d\mathbf{R}$ என்ற கோட்டுவழித் தொகை, C என்ற வளைகோட்டைப் பற்றிய சுற்றோட்டம் (circulation) என்ற பெயர் பெறும்.

(7) $\int_C F \times d\mathbf{R}$, $\int_C \phi\, d R$ முதலியன வேறுவகைக் கோட்டு வழித் தொகைகளாகும்.

§47. தேற்றம்

கொடுத்துள்ள ஒரு மண்டலத்தில் அமையும் தொடர்ச்சியுடைய ஆனால் சுழலிலா வெக்டர் **F** என்றால்,

(அ) $\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$ என்ற கோட்டு வழித் தொகையின் மதிப்பு P_1, P_2 என்ற கொடுத்துள்ள புள்ளிகளை இணைக்கும் வளைகோட்டைச் சாராது.

(ஆ) கொடுத்துள்ள மண்டலத்தில் அமையும் ஏதாவதொரு மூடிய வளைகோடு C என்றால்

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = 0$$

நிறுவல் :

(அ) **F** ஒரு சுழலிலா வெக்டர் என்றால், அது ϕ என்ற ஓர் எண்ணிச் சார்பின் வாட்டம் ஆகும்.

அதாவது, $\mathbf{F} = \nabla\phi$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} &= \nabla\phi\cdot d\mathbf{R} \\
&= \left(\sum \mathbf{i}\,\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\cdot\left(\sum \mathbf{i}\,dx\right) \\
&= \frac{\partial\phi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}\,dz \\
&= d\phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} &= \int_{P_1}^{P_2} d\phi = [\phi]_{P_1}^{P_2} \\
&= \phi_{P_2} - \phi_{P_1}
\end{aligned}$$

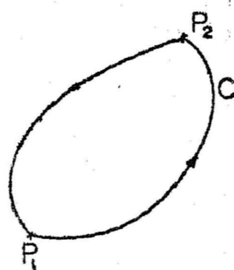
எனவே, கோட்டு வழித் தொகையின் மதிப்பு P_1, P_2 என்ற புள்ளிகளை மட்டும் சார்ந்துள்ளது ; அவற்றை இணைக்கும் வளை கோட்டைச் சார்ந்திருக்கவில்லை.

(ஆ) $P_1AP_2BP_1$ என்பது மூடிய வளைகோடு C ஐக் குறிக்கட்டும் [படம் 42].

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = \int_{P_1AP_2BP_1} d\phi$$

[(அ)-வில் விளக்கியபடி]

$$= \int_{\overrightarrow{P_1AP_2}} d\phi + \int_{\overrightarrow{P_2BP_1}} d\phi$$



படம்-42.

$$= \left(\phi_{P_1} - \phi_{P_2}\right) + \left(\phi_{P_1} - \phi_{P_2}\right)$$

$$= 0$$

[குறிப்பு : மேற்கூறிய தேற்றத்தின் மறுதலையும் உண்மையே. (இதன் நிறுவலை வேண்டுவோர், Sokolnikoff I.S., Redheffer R.M. Mathematics of Physics and Modern Engineering, Mc Graw Hill Book Co., 1958 - பக்கங்கள் 379-380—Theorem II ஐப் பார்க்கவும்)].

§ 48. மேற்பரப்பு வழித்தொகை (Surface Integral)

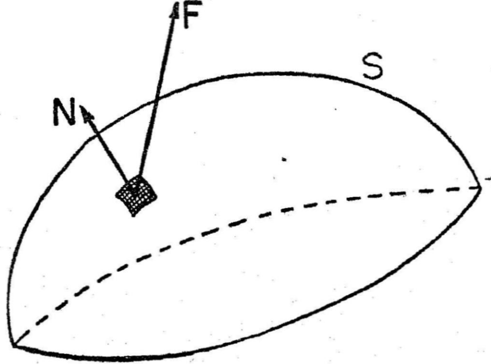
S என்பது இரு பக்கங்கள் உடைய (two sided) வளைபரப்பு (surface) என்போம். ஏதாவதொரு பக்கத்தை நேர்ப்பக்கம் (positive side) என எடுத்துக் கொள்வோம். S என்பது மூடிய வளைபரப்பு என்றால், வெளியில் தெரியும் பக்கத்தை (outer side) நேர்ப் பக்கமாக எடுத்துக் கொள்வது மரபு.

S-ன் ஒரு மேற்பரப்பு மூலகத்தை (surface areal element) dS என்றும், நேர்ப்பக்கத்தில் dS-க்கு வரையப்படும் அலகுச் செங்கோட்டை N என்றும் குறிப்பது வழக்கம் [படம் 43].

S-ன் மேல் அமைந்துள்ள வெக்டர் களத்தை F என்று குறிப்போம்.

F·N என்பது N திசையில் F-ன் கூறு (component) ஆகும். இஃது ஓர் எண் கணியம் (scalar quantity). (F·N) dS என்பது N திசையில் F-ன் கூறு மற்றும் மேற்பரப்பு மூலகம் dS ஆகிய இரண்டு எண் கணியங்களைப் பெருக்கி வந்த எண்ணி மதிப்பு ஆகும்.

கொடுத்துள்ள வளைபரப்பு S முழுமைக்கும் காணப்படும் இம் மாதிரியான சணியங்களின் தொகையை "S ன் மேல் F-ன் மேற் பரப்பு வழித் தொகை" அல்லது "புறப்பரப்பு வழித்தொகை" என்பர்.



படம்-43.

இதை $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS$ என்ற குறியீட்டு முறையில் எழுதுவர்.

S ஒரு மூடிய வளைபரப்பு என்றால் $\oiint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS$ என்றும் புறப் பரப்பு வழித்தொகையைக் குறிப்பது வழக்கம்.

N திசையில் dS பெறுமானமுள்ள வெக்டரை $d\mathbf{S}$ என்றும் சிலர் குறிப்பிடுவர். அப்போது மேற்கூறிய மேற்பரப்பு வழித் தொகையை $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ என்று குறிப்பர். $(\mathbf{N}\, dS = d\,\mathbf{S})$

[குறிப்பு (1): பாய்பொருள் இயக்கவியலில் V என்பது பாய்பொருளின் திசைவேக வெக்டர் என்றால், V·N என்பது ds என்னும் மூலகம் வழியாக ஓர் அலகு நேரத்தில் வெளியேறும் பாய்பொருளின் கன அளவைக் குறிக்கும். எனவே, $\iint_S \mathbf{V}\cdot\mathbf{N}\, ds$ என்பது ஓர் அலகு நேரத்தில் முழு வளை பரப்பு S வழியாக வெளியேறும் பாய்பொருளின் பெருக்கு (flux) என்று அறியலாம்.

(2) $\iint_S \mathbf{F} \times d\mathbf{s}$, $\iint_S \phi\, d\mathbf{S}$ அல்லது $\iint \phi \mathbf{N}\, ds$

என்பவை மற்ற மேற் பரப்பு வழித் தொகைகளாகும்.]

§49. தேற்றம்

கொடுத்துள்ள ஒரு திறந்த வளைபரப்பின் மேல் **F** என்ற வெக்டர் களம் உண்டென்போம். xy தளத்தில் S-ன் குத்துவீச்சு R எனில்,

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS = \iint_R \mathbf{F}\cdot\mathbf{N} \frac{dx\, dy}{|\mathbf{N}\cdot\mathbf{k}|}$$

பின்னர் வரும் படம் 53-ல் $dxdy$ என்பது dS-ன் குத்து வீச்சு, **N** என்பது dS-ன் அலகுச் செங்கோட்டு வெக்டர், **k** என்பது $dxdy$-ன் அலகுச் செங்கோட்டு வெக்டராகும். **N**, **k** இவற்றுக்கிடையே உள்ள குறுங்கோணம் θ என்று கொள்வோம்.

$$\cos\theta = |\mathbf{N}\cdot\mathbf{k}|$$

$$dx\, dy = dS \cos\theta = dS\, |\mathbf{N}\cdot\mathbf{k}|$$

$$\therefore \quad dS = \frac{dxdy}{|\mathbf{N}\cdot\mathbf{k}|}$$

$$\therefore \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS = \iint_R \mathbf{F}\cdot\mathbf{N} \frac{dx\, dy}{|\mathbf{N}\cdot\mathbf{k}|}$$

[குறிப்பு : yz, zx-தளங்களில் S-ன் குத்து வீச்சுகள் முறையே R', R'' என்றால்

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS = \iint_{R'} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\frac{dy\, dz}{|\mathbf{N}\cdot\mathbf{i}|} = \iint_{R''} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\frac{dz\, dx}{|\mathbf{N}\cdot\mathbf{j}|}$$]

§ 50. கனவழித் தொகை (Volume Integral)

ஒரு மூடிய வளைபரப்பிற்குள் அடங்கிய கன உருவம் (solid) V கனஅளவு உடையது என்போம். அந்தக் கன உருவத்தில் ஏதாவது ஒரு புள்ளியில் அமையும் மூலகத்தின் கன அளவு dV என்றும், அந்தக் கன உருவத்தில் அமையும் எண்ணிக் களத்தை $\phi(x, y, z)$ என்றும் குறித்தால், அப்போது,

$\iiint\limits_V \phi \, dV$ என்பதை ஒரு கனவழித் தொகை எனக் கூறுவர்.

$\phi(x, y, z)$ என்பது (x, y, z) என்ற புள்ளியில் அமையும் அடர்த்தி (density) ஐக் குறித்தால், $\phi \, dV$ அந்த மூலகத்தின் திணிவைக் (mass) குறிக்கும்.

அப்போது,

$\iiint\limits_V \phi dV$ என்ற கனவழித் தொகை அந்தக் கன உருவத்தின் மொத்தத் திணிவைக் குறிக்கும்.

F என்பது ஒரு வெக்டர் எனில்,

$\iiint \mathbf{F} dV$ என்பது மற்றுமொரு கனவழித் தொகை ஆகும்.

§51. மேலே விளக்கிய கோட்டு வழி, மேற்பரப்பு வழி, கனவழித் தொகைகளைக் காணும்போது பின்வரும் ரீமானியன் வரையறுத்த தொகைச் சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்த நேரிடும்:

§51·1. $\int_0^a f(x)\,dx = \int_b^a f(a-x)\,dx$

§51·2. $f(x)$ ஓர் இரட்டைச் சார்பு என்றால்,

அதாவது, $f(-x) \equiv f(x)$ என்றால்,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

§51·3. $f(x)$ ஓர் ஒற்றைச் சார்பு எனில்,

அதாவது, $f(-x) \equiv -f(x)$ என்றால்,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

§ 51·4. $f(a-x) \equiv f(x)$ என்றால்,

$$\int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^{a/2} f(x)\,dx$$

§ 51·5. $f(a-x) \equiv -f(x)$ என்றால்,

$$\int_0^a f(x)\,dx = 0$$

§ 51·6. m, n என்பவை (0 உள்பட) நேர் முழு எண்கள் (positive integers) என்றால்,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x\,dx$$

$$= \frac{(m-1)(m-3)\ldots(n-1)(n-3)\ldots}{(m+n)(m+n-2)(m+n-4)\ldots}\,k$$

இங்கே, $k = \frac{\pi}{2}$, m, n இரண்டும் இரட்டை எண்களானால்,

$k = 1$, அப்படி இல்லாவிட்டால்.

[குறிப்பு : மேற்கூறிய சூத்திரங்களின் நிறுவல்களை ஆசிரியர் எழுதியுள்ள "பொறியியற் கணக்கு—இரண்டாம் பாகம்" நூலில் அதிகாரம் 1-§ 25, § 26·7 ஆகியவற்றில் காணலாம்.]

மாதிரிக்கணக்கு (1)

A என்பது, t என்ற ஒரே மாறியைச் சார்ந்துள்ள ஏதாவதொரு வெக்டர் என்றால்

$$\int \left(\mathbf{A} \times \frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2}\right) dt = \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \mathbf{C}$$

என நிறுவுக. (**C** ஒரு மாறு வெக்டர்).

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{A}}{dt}\right) = \mathbf{A} \times \frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \frac{d\mathbf{A}}{dt}$$

$$= \mathbf{A} \times \frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2} + 0$$

$$\therefore \quad d\left(A\times \frac{dA}{dt}\right) = \left(A + \frac{d^2A}{dt^2}\right)dt$$

$$\therefore \quad \int\left(A\times \frac{d^2A}{dt^2}\right)dt = \int d\left(A\times \frac{dA}{dt}\right)$$

$$= A\times \frac{dA}{dt} + C$$

மாதிரிக்கணக்கு (2)

$F(t) = (3t^2 - t)\,i + (2 - 6t)\,j - 4t\,k$ என்றால்,

(அ) $\int F(t)\,dt$ (ஆ) $\int_2^4 F(t)\,dt$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

(அ) $\int F(t)\,dt = i\int (3t^2 - t)\,dt + j\int (2 - 6t)\,dt$

$$- k\int 4t\,dt$$

$$= \left(t^3 - \frac{1}{2}t^2\right)i + (2t - 3t^2)\,j - 2t^2\,k + C$$

(C மாறு வெக்டர்).

(ஆ) $\int_2^4 F(s)\,dt = i\left[t^3 - \frac{1}{2}t^2\right]_{t=2}^{4} + j\left[2t - 3t^2\right]_{t=2}^{4}$

$$- 2k\,[t^2]_{t=2}^{t=4}$$

$$= [(64 - 8) - (8 - 2)]\,i + [(8 - 48) - (4 - 12)]\,j$$
$$- 2\,[16 - 4]\,k$$

$$= 50i - 32j - 24k$$

மாதிரிக்கணக்கு (3)

t நேரத்தில் ($t > 0$) ஒரு புள்ளியின் முடுக்க வெக்டர் (acceleration vector)

$A = e^{-t}\,i - 6(t+1)\,j + (3\sin t)\,k$. தொடக்கத்தில் அதன் இடப்பெயர்ச்சியும் திசைவேகமும் பூச்சியம் எனில், t நேரத்தில் இடப்பெயர்ச்சி, திசைவேகம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

R, V முறையே இடப்பெயர்ச்சி, திசைவேக வெக்டர்கள் எனக் கொள்வோம்.

பின்பு, $\mathbf{A} = \frac{d\mathbf{V}}{dt}$ என்பதால்,

$$\mathbf{V} = \int \mathbf{A}\,dt = \mathbf{i}\int e^{-t}\,dt - 6\mathbf{j}\int (t+1)\,dt + 3\mathbf{k}\int \sin t\,dt + \mathbf{C}$$

(C ஏதாவதொரு மாறு வெக்டர்)

அதாவது, $\mathbf{V} = -e^{-t}\,\mathbf{i} - 6\left(\frac{1}{2}t^2 + t\right)\mathbf{j} - (3\cos t)\mathbf{k} + \mathbf{C} \quad \ldots \quad (1)$

ஆனால், கணக்கின்படி, $t = 0$, $\mathbf{V} = 0$

$$\therefore \quad 0 = -\mathbf{i} - 1 - 3\mathbf{k} + \mathbf{C} \quad \ldots \quad (2)$$

(1)−(2); $\mathbf{V} = (1-e^{-t})\mathbf{i} - (3t^2+6t)\mathbf{j} + (3 - 3\cos t)\mathbf{k}$

மேலும், $\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$

$$\therefore \quad \mathbf{R} = \int \mathbf{V}\,dt$$

$$= \mathbf{i}\int (1-e^{-t})\,dt - \mathbf{j}\int (3t^2+6t)\,dt + \mathbf{k}\int (3-3\cos t)\,dt + \mathbf{D}$$

(D ஒரு மாறு வெக்டர்)

அதாவது,

$$\mathbf{R} = (t+e^{-t})\mathbf{i} - (t^3+3t^2)\mathbf{j} + (3t+3\sin t)\mathbf{k} + \mathbf{D} \quad \ldots \quad (3)$$

ஆனால், $t = 0$ என்னும்போது, $\mathbf{R} = 0$

$$\therefore \quad 0 = \mathbf{i} - 0 + 0 + \mathbf{D} \quad \ldots \quad (4)$$

(3)−(4); $\mathbf{R} = (t+e^{-t}-1)\mathbf{i} - (t^3+3t^2)\mathbf{j} + (3t-3\sin t)\mathbf{k}$

மாதிரிக் கணக்கு (4)

$$\mathbf{F} = (2y+3)\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + (yz-x)\mathbf{k}$$

என்பது ஒரு விசை வெக்டரானல்,

$x = 2t^2,\ y = t,\ z = t^3$ என்ற வளைகோட்டில்

(அ) $t = 0$ முதல் $t = 1$ வரை உள்ள வில் (arc) வழியாகவும்

(ஆ) $A(0, 0, 0)$ முதல் $B(0, 0, 1)$ வரை
பின்பு $B(0, 0, 1)$ முதல் $C(0, 1, 1)$ வரை
பின்பு $C(0, 1, 1)$ முதல் $D(2, 1, 1)$ வரை
உள்ள நேர்கோடுகளின் வழியாகவும்

(இ) AD என்ற ஒரே கோட்டின் வழியாகவும், அந்த வெக்டர் செய்த வெவ்வேறு வேலைகளின் மதிப்புகளைக் கணக்கிடுக.

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = (2y+3)\,dx + xz\,dy + (yz-x)\,dz$$

(அ) $x = 2t^2,\ \ y = t,\ \ z = t^3$ என்றால்,

$$dx = 4t\,dt,\quad dy = dt,\quad dz = 3t^2\,dt$$

$$\therefore\ \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = (2t+3)\,4t\,dt + 2t^5\,dt + (t^4-2t^2)\,3t^2\,dt$$

$$= (8t^2 + 12t + 2t^5 + 3t^6 - 6t^4)\,dt$$

$$= (3t^6 + 2t^5 - 6t^4 + 8t^2 + 12t)\,dt$$

$$\therefore \int_{t=0}^{1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = \int_{t=0}^{1} (3t^6 + 2t^5 - 6t^4 + 8t^2 + 12t)\,dt$$

$$= \left[\frac{3}{7}t^7 + \frac{1}{3}t^6 - \frac{6}{5}t^5 + \frac{8}{3}t^3 + 6t^2\right]_{t=0}^{1}$$

$$= \frac{288}{35}$$

(ஆ) $A(0, 0, 0)$, $B(0, 0, 1)$ என்பதால்,

$\overrightarrow{AB}$-ன் சமன்பாடு : $x = 0,\ \ y = 0,\ \ 0 \le z \le 1$

$$\therefore\ dx = 0 = dy$$

$\overrightarrow{AB}$ நேர் கோட்டில், $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = 0 + 0 + (0-0)\,dy$
$= 0$

$$\therefore \int_{\overrightarrow{AB}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = 0$$

$B(0, 0, 1)$, $C(0, 1, 1)$ என்பதால்,

$\overrightarrow{BC}$-ன் சமன்பாடு : $x = 0$, $z = 1$, $0 \le y \le 1$

$$\therefore \; dx = 0 = dz$$

$\overrightarrow{BC}$ நேர் கோட்டில், $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = 0 + 0 + 0 = 0$

$$\therefore \int_{\overrightarrow{BC}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = 0$$

$C(0, 1, 1)$, $D(2, 1, 1)$ என்பதால்

$\overrightarrow{CD}$-ன் சமன்பாடு : $y = 1$, $z = 1$, $0 \le x \le 2$,

$$\therefore \; dy = 0 = dz$$

$\overrightarrow{CD}$ நேர்கோட்டில், $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = (2 + 3)\,dx = 5\,dx$

$$\therefore \int_{\overrightarrow{CD}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = \int_{x=0}^{2} 5\,dx = 5\Big[\,x\,\Big]_0^2 = 10$$

$$\therefore \int_{ABCD} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = \int_{\overrightarrow{AB}} + \int_{\overrightarrow{BC}} + \int_{\overrightarrow{CD}} = 0 + 0 + 10$$

$$= 10$$

(இ) $A(0, 0, 0)$, $D(2, 1, 1)$ என்பதால், $\overrightarrow{AD}$ நேர்க் கோட்டின் சமன்பாடு :

$$\frac{x-0}{2} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1}$$

அதாவது, $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ $(0 \leq z \leq 1)$

$\therefore \quad x = 2z, \quad y = z$

$\therefore \quad dx = 2\,dz, \; dy = dz$

$\therefore \quad \overrightarrow{AD}$-ன் மேல், $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = (2z + 3)\, 2\, dz + 2z^2\, dz + (z^2 - 2z)\, dz$

$= (3z^2 + 2z + 6)\, dz$

$$\therefore \int_{\overrightarrow{AD}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \int_{z=0}^{1} (3z^2 + 2z + 6)\, dz$$

$= 1 + 1 + 6 = 8$

மாதிரிக்கணக்கு (5)

$\mathbf{V} = (y - 2x)\,\mathbf{i} + (3x + 2y)\,\mathbf{j}$ என்பது ஒரு திசைவேக வெக்டர் என்றால், xy-தளத்தில், மையம் ஆதியிலும், ஆரம் 2 அலகுமாக உள்ள $\mathbf{V}$-ன் C என்ற வட்ட வழிச் சுற்ரேட்டத்தைக் (circulation) காண்க.

C என்ற வட்டத்தின் சமன்பாடு: $x^2 + y^2 = 4$

சுற்ரேட்டம் $= \int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{R}$

இப்போது, $\mathbf{V} \cdot d\mathbf{R} = (y - 2x)\, dx + (3x + 2y)\, dy$

C-ன் துணையலகுச் சமன்பாடு:

$x = 2\cos\theta, \; y = 2\sin\theta; \quad -\pi < \theta \leq \pi$

$\therefore \quad dx = -2\sin\theta\, d\theta, \; dy = 2\cos\theta\, d\theta$

$\therefore \quad \mathbf{V} \cdot d\mathbf{R} = (2\sin\theta - 4\cos\theta)(-2\sin\theta\, d\theta) + (6\cos\theta + 4\sin\theta)\, 2\cos\theta\, d\theta$

$= (12\cos^2\theta - 4\sin^2\theta + 16\sin\theta\cos\theta)\, d\theta$

$$\therefore \int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{R} = \int_{\theta=-\pi}^{\pi} (12\cos^2\theta - 4\sin^2\theta + 16\sin\theta\cos\theta)\, d\theta$$

இப்போது, $12\cos^2\theta$, $4\sin^2\theta$ ஆகியவை $(-\pi, \pi)$-ல் இரட்டைச் சார்புகள்.

ஆனால், $16\sin\theta\cos\theta$ ஓர் ஒற்றைச் சார்பு.

எனவே, § 51 ஐப் பயன் படுத்தினால்

$$\int_C \mathbf{V}\cdot d\mathbf{R} = 24\int_0^{\pi} \cos^2\theta\, d\theta - 8\int_0^{\pi} \sin^2\theta\, d\theta$$

$$= 48\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta - 16\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\, d\theta \qquad (\S\ 51\cdot 4)$$

$$= 48\cdot\frac{\pi}{4} - 16\cdot\frac{\pi}{4} \qquad (\S\ 51\cdot 6)$$

$\therefore$ சுற்றோட்டம் $= 8\pi$

மாதிரிக்கணக்கு (6)

$2x+y+2z=6$ என்பது ஒரு முப்பரிமாண தளம் S என்க. முதல் அரைக்காற்கோளத்தில் (first octant) அடங்கும் S-ன் பகுதியில் $\mathbf{F} = (x+y^2)\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + 2yz\mathbf{k}$ என்ற வெக்டர் களம் உண்டானால்,

$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS$ என்ற மேற்பரப்புத் தொகையைக் காண்க.

$\phi(x, y, z) \equiv 2x+y+2z-6$ என்றால், $\phi = 0$ என்பது S-ன் சமன்பாடாகும்.

$\therefore$ S-ன் ஒரு செங்கோட்டு வெக்டர் $= \nabla\phi$

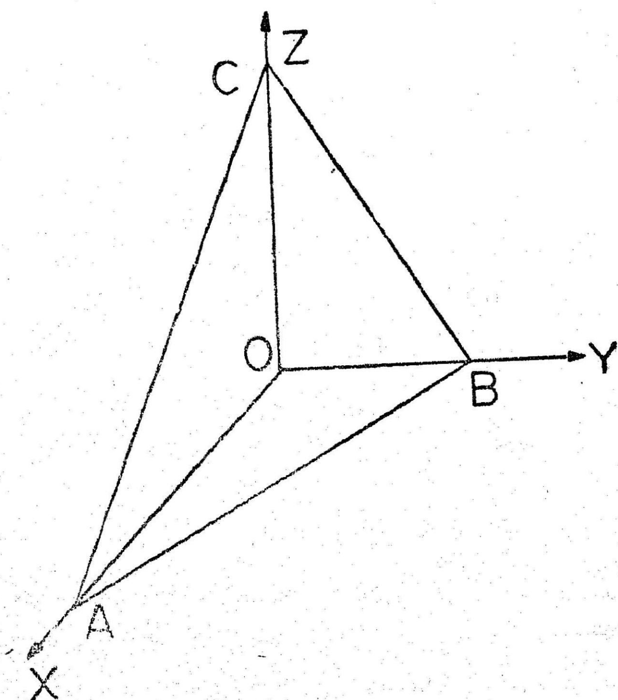
$$= 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

$\therefore$ S-ன் அலகுச் செங்கோட்டு வெக்டர்

$$\mathbf{N} = \frac{2\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{1}{3}(2\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k})$$

$$\therefore\ |\mathbf{N}\cdot\mathbf{k}| = \frac{2}{3}$$

xy தளத்தில் S-ன் குத்து வீச்சு முக்கோணம் OAB ஆகும் (படம் 44). இதை R எனக் குறிப்போம்.



படம்-44.

பின்பு, $dS = \dfrac{dx\, dy}{|\mathbf{N}\cdot\mathbf{k}|} = \dfrac{dx\, dy}{\frac{2}{3}}$

மேலும், R-ன் சமன்பாடு . $2x + y - 6 = 0$ ... (1)

இப்போது, $\mathbf{F}\cdot\mathbf{N} = \dfrac{2}{3}(x+y^2) - \dfrac{2}{3}x + \dfrac{4}{3}yz$

$= \dfrac{2}{3}(y^2 + 2yz)$

$$\therefore \quad \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_R \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,\frac{dx\,dy}{|\mathbf{N}\cdot\mathbf{K}|}$$

$$= \frac{2}{3}\iint_R (y^2 + 2yz)\,\frac{dx\,dy}{\frac{2}{3}}$$

$$= \iint_R y^2 + 2y\left\{\frac{(6-2x-y)}{2}\right\} dx\,dy$$

(S-ன் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தினால்)

$$= \iint_R (y^2 + 6y - 2xy - y^2)\,dx\,dy$$

$$= 2\iint_R (3y - xy)\,dx\,dy$$

$$= 2\int_{x=0}^{3}\int_{y=0}^{6-2x} (3y - xy)\,dy\,dx \qquad [(1)\text{-லிருந்து}]$$

$$= 2\int_{x=0}^{3}\int_{y=0}^{6-2x} (3-x)\,y\,dy\,dx$$

$$= 2\int_{x=0}^{3} (3-x)\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{6-2x} dx$$

$$= 2\int_{x=0}^{3} (3-x)\frac{(6-2x)^2}{2}\,dx$$

$$= 4\int_0^3 (3-x)^3\,dx$$

$$= -4\left[\frac{(3-x)^4}{4}\right]_0^3$$

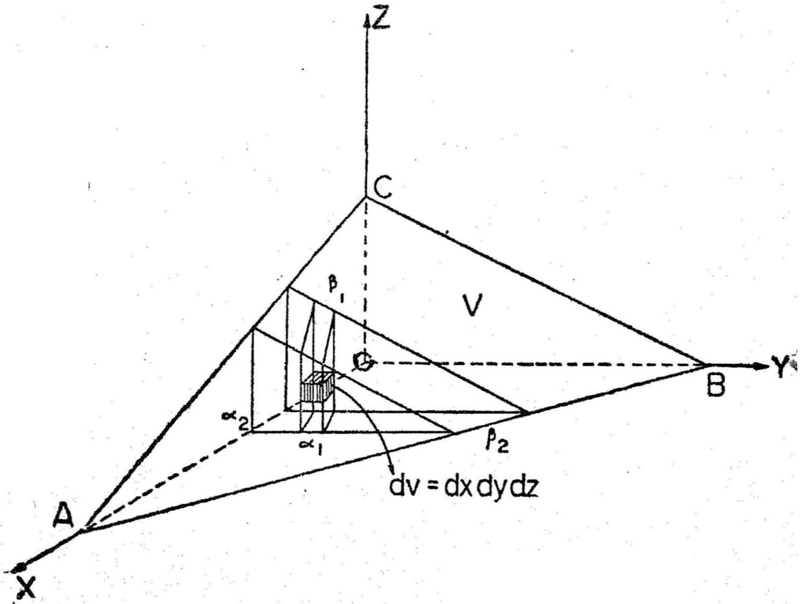
$$= 3^4$$

$$= 81$$

மாதிரிக்கணக்கு (7)

$x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ மற்றும் $2x+2y+z=4$ ஆகிய நான்கு தளங்களுக்குள் அடங்கிய கன உருவம் V-ல் அமையும் வெக்டர் களம் $\mathbf{F} = (2x^2 - 3z)\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j} - 4x\mathbf{k}$ என்றால்,

$$\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{F}\, dV$$-ன் மதிப்பு காண்க.



படம்-45.

$$\nabla\cdot F = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2-3x) + \frac{\partial}{\partial y}(-2xy) + \frac{\partial}{\partial z}(-4x)$$

$$= 4x-2x+0 = 2x$$

V என்பது $OABC$ என்ற கன உருவத்தைக் குறிக்கும்.

z-ன் மாறல் (variation): α_1 முதல் β_1 வரை.

அதாவது $z=0$ முதல் $z=4-2x-2y$ வரை

y-ன் மாறல்: α_2 முதல் β_2 வரை

அதாவது $y=0$ முதல் $z=2-x$ வரை

x-ன் மாறல் : 0 முதல் A வரை.

அதாவது $x=0$ முதல் $x=2$ வரை. [படம் 45]

$$\therefore \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{2-x}\int_{z=0}^{4-2x-2y} 2x\,dx\,dy\,dz$$

$$= 2\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{2} x\Big[z\Big]_0^{4-2x-2y} dy\,dx$$

$$= 2\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{2-x} x\,(4-2x-2y)\,dy\,dx$$

$$= 2\int_{x=0}^{2} x\,[4y-2xy-y^2]_{y=0}^{2-x}\,dx$$

$$= 2\int_{x=0}^{2} x\,[4(2-x)-2x(2-x)-(2-x)^2]dx$$

$$= 2\int_{x=0}^{2} x\,(2-x)\,[4-2x-(2-x)]\,dx$$

$$= 2\int_{x=0}^{2} (4x-4x^2+x^3)\,dx$$

$$= 2\left[2x^2-\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4\right]_0^2$$

$$= 2\left[8-\frac{32}{3}+4\right]$$

$$= \frac{8}{3}$$

மாதிரிக்கணக்கு (8)

(அ) $\mathbf{F}=(2xy+z^3)\mathbf{i}+x^2\mathbf{j}+3xz^2\mathbf{k}$ என்பது ஒரு காப்புநிலை வெக்டர் (conservative force vector) என்று நிறுவுக.

(ஆ) வெக்டர் தொகையிடல் முறையைப் பயன்படுத்தி, அதன் எண்ணி நிலைப் பண்பு (scalar potential) காண்க.

(இ) (1, −2, 1) என்ற புள்ளியில் இருக்கும் ஒரு துகளை (3, 1, 4) என்ற புள்ளிக்கு நகர்த்தும்போது அந்த விசை செய்யும் வேலையை, எண்ணி நிலைப் பண்பிலிருந்து கணக்கிடுக.

(அ) $$\nabla\times\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2xy+z^3 & x^2 & 3xz^2\end{vmatrix}$$

$$=\mathbf{i}(0-0)-\mathbf{j}(3z^2-3z^2)+\mathbf{k}(2x-2x)$$

$$=0$$

∴ F ஒரு காப்புநிலை வெக்டராகும்.

(ஆ) காப்புநிலை விசைவெக்டர் F-ன் எண்ணி நிலைப்பண்பு ϕ என்றால், $\mathbf{F}=\nabla\phi$

$$\therefore\quad \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}=\nabla\phi\cdot dR$$

$$=\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(\mathbf{i}dx+\mathbf{j}\,dy+\mathbf{k}\,dz)$$

$$=\frac{\partial\phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\phi}{\partial y}dy+\frac{\partial\phi}{\partial z}dz$$

அதாவது, $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}=d\phi$ ... (1)

ஆனால், $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}=(2xy+z^3)\,dx+x^2\,dy+3xz^2\,dz$

$$=(2xy\,dn+x^2\,dy)+(z^3\,dx+3xz^2\,dz)$$

$$=d(x^2y)+d(xz^3)$$

அதாவது, $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}=d(x^2y+x^3)$ .... (2)

(1), (2) சமன்பாடுகளிலிருந்து

$$\phi(x, y, z) = x^2 y + x z^3 + c \text{ (c மாறிலி)} \qquad \ldots \quad (3)$$

இதுவே நமக்குத் தேவையான எண்ணி நிலைப்பண்பு ஆகும்.

$$\text{(இ) விசை செய்த வேலை} = \int_{(1, -2, 1)}^{(3, 1, 4)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

F ஒரு காப்பு நிலை விசை வெக்டர் என்பதால், அது செய்யும் வேலையானது தொடக்க முடிவுப் புள்ளிகளைப் பொறுத்தது ஆகும்; அந்தப் புள்ளிகளை இணைக்கும் எந்த வளைகோட்டுப் பாதையையும் சார்ந்திராது (§ 47 தேற்றம்).

∴ மேற்படி விசை செய்த வேலை

$$= \int_{(1, -2, 1)}^{(3, 1, 4)} d\phi \qquad \text{[சமன்பாடு (1)]}$$

$$= \Big[\phi(x, y, z) \Big]_{(1, -2, 1)}^{(3, 1, 4)}$$

$$= \phi(3, 1, 4) - \phi(1, -2, 1)$$

$$= (3^2 \cdot 1 + 3 \cdot 4^3) - \{ 1(-2) + 1 \cdot 1^3 \} \qquad \text{[சமன்பாடு (3)]}$$

$$= 9 + 192 + 1$$

$= \mathbf{202}$ அலகு.

பயிற்சி—6.

(1) $\mathbf{R}(t) = (t - t^2)\mathbf{i} + 2t^3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ எனில்,

(அ) $\int \mathbf{R}(t)\, dt$ (ஆ) $\int_1^2 \mathbf{R}(t)\, dt$ காண்க.

(2) $\mathbf{A}(t) = t\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + t6\mathbf{k}$ மற்றும்,

$\mathbf{B}(t) = 2t^2\mathbf{i} + 6t\mathbf{k}$ எனில்,

(அ) $\int_0^2 \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\, dt$ (ஆ) $\int_1^2 \mathbf{A} \times \mathbf{B}\, dt$ காண்க.

(3) ஒரு துகளின் முடுக்கம்

$$\mathbf{A} = (12 \cos 2t)\,\mathbf{i} - (8 \sin 2t)\,\mathbf{j} + 16t\,\mathbf{k}$$

என்ற வெக்டரால் குறிப்பிடப் படுகிறது. t நேரத்தைக் குறிக்கிறது. தொடக்கத்தில் அந்தத் துகளின் இடப் பெயர்ச்சியும், திசைவேகமும் சுழி (பூச்சியம்) என்றால், t என்னும் நேரத்தில் அதன் இடப் பெயர்ச்சி மற்றும் திசைவேக வெக்டர்களைக் காண்க.

(4) $3x^2\mathbf{i} + (2xz-y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ என்ற விசை கொடுத்துள்ள ஒரு துகளை,

(அ) $(0, 0, 0)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $(2, 1, 3)$ என்ற புள்ளிக்கு நேர் கோட்டிலும்,

(ஆ) $t = 0$ முதல் $t = 1$ வரை, $x = 2t^2$, $y = t$, $z = 4t^2$ என்ற வளை கோட்டிலும்,

(இ) $x = 0$ முதல் $x = 2$ வரை, $x^2 = 4y$, $3x^3 = 8z$ என்ற வளை கோட்டிலும்,

நகர்த்துவதற்காகச் செய்த வேலைகளைக் கணக்கிடுக.

(5) 3 அலகு ஆரத்துடன் ஆதியில் மையம் கொண்டுள்ள ஒரு வட்டத்தின் விளிம்பின் மேல் ஒரு துகள்,

$$\mathbf{F} = (2x - y + z)\,\mathbf{i} + (x + y - z^2)\,\mathbf{j} + (3x - 2y + 4z)\,\mathbf{k}$$

என்ற விசையால் முழுமையாக ஒரு சுற்று நகர்த்தப்பட்டால், அந்த விசை செய்த வேலையைக் கணக்கிடுக.

(6) S என்பது முதல் அரைக்காற் கோளத்திற்குள் அடங்கிய தளம் $2x + 3y + 6z = 12$ ஐக் குறிக்கிறது. S–ல் அமையும் ஒரு வெக்டர் களம் $18z\,\mathbf{i} - 12\,\mathbf{j} + 3y\,\mathbf{k}$ எனில், $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$ என்ற புறப் பரப்பு வழித் தொகையைக் கணக்கிடுக.

(7) $x^2 + z^2 = 9$, $x = 0$, $z = 0$, $y = 8$ ஆகிய உருளையின் (cylinder) பகுதியை S என்று குறிப்போம். S-ல் அமையும் வெக்டர் களம் $6z\,\mathbf{i} + (2x + y)\,\mathbf{j} - x\,\mathbf{k}$ என்றால், $\oiint \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$ ஐக் காண்க.

(8) S என்பது $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ ஆகிய தளங்களில் அடங்கிய 1 அலகு உள்ள கன சதுரத்தைக் குறிக்கட்டும். σ என்பது, மையம் ஆதியிலும் ஆரம் a ஆகவும் உள்ள ஒரு கோளத்தைக் (sphere) குறிக்கட்டும்.

$\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ என்றால்,

(அ) $\displaystyle\oiint_S \mathbf{R} \cdot \mathbf{N}\, dS$ (ஆ) $\displaystyle\oiint_\sigma \mathbf{R} \cdot \mathbf{N}\, d\sigma$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் கணக்கிடுக.

(9) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ என்னும் தளங்களுக்குள் அடங்கிய உருளை $z = 4 - x^2$-ன் கன உருவம் V என்றால் $\displaystyle\iiint_V (2x + y)\, dV$-ன் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

(10) $x=0$, $y=0$, $y=6$, $z=x^2$, $z=4$ என்பனவற்றுக்குள் அடங்கிய கன உருவ மண்டலம் V-ல் அமைந்துள்ள வெக்டர் களம் $2xz\mathbf{i} - x\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$ எனில், $\displaystyle\iiint_V F\, dV$-ன் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

விடைகள்

(1) (அ) $\left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3\right)\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^4\mathbf{j} - 3t\mathbf{k} + \mathbf{C}$

(C மாறு வெக்டர்).

(ஆ) $-\frac{5}{6}\mathbf{i} + \frac{15}{2}\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

(2) (அ) 0 (ஆ) $-\frac{87}{2}\mathbf{i} - \frac{44}{3}\mathbf{j} + \frac{15}{2}\mathbf{k}$

(3) $\mathbf{R} = (3 - 3\cos 2t)\mathbf{i} + (2\sin 2t - 4t)\mathbf{j} + \frac{8t^3}{3}\mathbf{k}$

$\mathbf{V} = (6\sin 2t)\mathbf{i} + (4\cos 2t - 4)\mathbf{j} + 8t^2\mathbf{k}$

(4) (அ) 16 (ஆ) 14·2 (இ) 16

(5) 18π (6) 24 (7) 18π

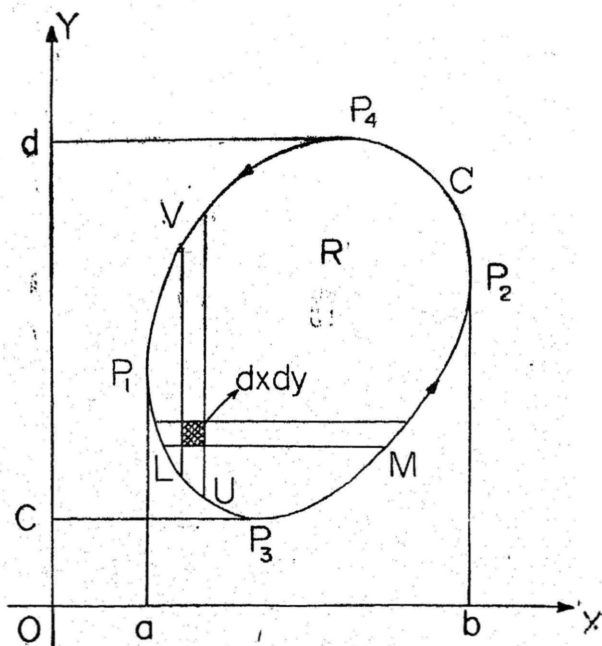
(8) (அ) 3 (ஆ) $4\pi a^3$

(9) $\frac{80}{3}$ 10. $128\mathbf{i} - 24\mathbf{j} + 384\mathbf{k}$

7. வெக்டர் தொகைத் தேற்றங்கள்

§ **52.** இருபரிமாண வெளியில் கிரீன் தேற்றம் (Green's Theorem in two dimensions)

x y-தளத்தில், *C* என்னும் எளிய மூடிய வளைகோட்டிற்குள் (simple closed curve) அடங்கிய மண்டலத்தை *R* என்று குறிப்போம்.



படம்-46.

M (*x*, *y*), *N* (*x*, *y*) என்ற சார்புகளும் அவற்றின் வகைக்கெழுக்களும் *R*-மண்டலத்தின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் தொடர்ச்சி

யான (continuous at every point of the region R) சார்புகள் என்றால்,

$$\oint_C (M\,dx + N\,dy) = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx\,dy$$

நிறுவல் :

x, y அச்சுகளுக்கு இணையாக வளைகோடு C-க்கு aP_1, bP_2, cP_3, dP_4 என்ற தொடுகோடுகளை வரைக. [படம் 46).

$P_1 P_3 P_2$, $P_2 P_4 P_1$ என்ற வளைகோட்டுப் பகுதிகளின் சமன்பாடுகள் முறையே

$y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ என்க.

இவை ஒரே மதிப்புடைச் சார்புகளாகும் (single valued functions).

அவ்வாறே $P_4 P_1 P_3$, $P_3 P_2 P_4$ ஆகிய வளைகோட்டுப் பகுதிகளின் சமன்பாடுகளை முறையே

$x = g_1(y)$, $x = g_2(y)$ எனக் குறித்தால் இவையும் ஒரு மதிப்புடைச் சார்புகளே.

$$I_1 = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x}\,dx\,dy$$

என்னும் மேற்பரப்புத் தொகையை இப்போது ஆராய்வோம்.

$dx\,dy$ என்ற மூலகம் முதலில் LM என்னும் செவ்வகத்தைக் கடப்பதாகவும், பின்பு LM என்னும் செவ்வகம் c முதல் d வரை இயங்குவதாகவும் கொண்டால், R என்னும் மண்டலம் முழுவதும் தழுவியதாகக் கருதப்படும்.

$$\therefore \quad I_1 = \int_{y=c}^{d} \left[\int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} \frac{\partial N}{\partial x} \right] dy$$

$$= \int_{y=c}^{d} \Big[N(x, y) \Big]_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} dy$$

$$= \int_{y=c}^{d} \Big[[N\{g_2(y), y\} - N\{g_1(y), y\} \Big] dy$$

$$= \int_{y=c}^{d} N\{g_2(y), y\}\, dy + \int_{y=d}^{c} N\{g_1(y), y\}\, dy$$

$$= \int_{\widehat{P_3P_2P_4}} N(x, y)\, dy + \int_{\widehat{P_4P_1P_3}} N(x, y)\, dy$$

$$= \oint_C N(x, y)\, dy = \oint_C N\, dy$$

$$\therefore \quad I_1 = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x}\, dx\, dy = \oint_C N\, dy \qquad \dots \quad (1)$$

இப்போது, $I_2 = \iint \frac{\partial M}{\partial y}\, dx\, dy$

என்ற மேற்பரப்புத் தொகையைக் கவனிப்போம்.

dx dy என்ற மூலகம் முதலில் நீண்ட சதுரம் *UV* மேல் நகர்ந்து, பின்பு *UV*, *a* முதல் *b* வரை நகர்ந்தாலும் *R* மண்டலம் முழுவதும் தழுவியதாகும்.

$$\therefore \quad I_2 = \int_{x=a}^{b} \left[\int_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}\, dy \right] dx$$

$$= \int_{x=a}^{b} \Big[M(x, y) \Big]_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} dx$$

$$= \int_{x=a}^{b} \Big[M\{x, f_2(x)\} - M\{x, f_1(x)\} \Big] dx$$

$$= - \int_{x=b}^{a} M\{x, f_2(x)\}\, dx - \int_{x=a}^{b} M\{x, f_1(x)\}\, dx$$

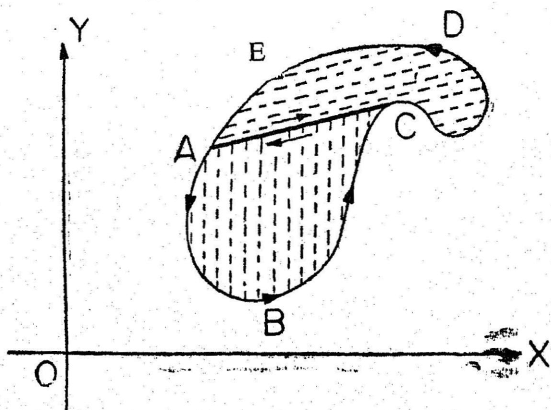
$$= - \int_{\widehat{P_2P_4P_1}} M(x, y)\, dx - \int_{\widehat{P_1P_3P_2}} M(x, y)\, dx$$

$$= - \oint_C M\, dx$$

$$\therefore \quad I_2 = \iint_R \frac{\partial M}{\partial y}\, dx\, dy = - \oint_C M\, dx \qquad \ldots \quad (2)$$

$$(1)-(2): \quad \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx\, dy = \oint_C (M\,dx + N\,dy)$$

[குறிப்பு : மேற்கண்ட தேற்றத்தை எளிய மூடிய மண்டலத்திற்கு நிறுவியிருந்த போதும், எளியதல்லாத மூடிய மண்டலத்திற்கும் மேற்படித் தேற்றம் பொருந்தும். விளக்கம் வருமாறு :



படம்–47.

படம் 47-ல் $ABCDEA$ என்ற மூடிய வளைகோடு எளியதல்ல. ஏனென்றால், y-அச்சுக்கு இணையான ஒரு நேர்கோடு அந்த வளைகோட்டை இரண்டுக்கும் மேற்பட்ட புள்ளிகளில் வெட்டும். ஆனால் $ABCDEA$ ஐ $ABCA$, $ACDEA$ என்ற இரண்டு எளிய வளைகோடுகளாகப் பிரிக்கலாம்.

ABCDEA, *ABCA*, *ABCEA* ஆகிய வளைகோடுகள் அடக்கியுள்ள மண்டலங்களை முறையே R_1, R_2, R_3 என்று குறித்தால்,

$$\int_{\widehat{ABCA}} Mdx + Ndy = \iint_{R_1} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\ dy$$

$$\int_{\widehat{ACDEA}} Mdx + Ndy = \iint_{R_2} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\ dy$$

இவற்றைக் கூட்டினால்,

$$\int_{ABC} + \int_{CA} + \int_{AC} + \int_{CDEA} = \iint_{R_1+R_2} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\ dy$$

ஆனால், $\int_{\widehat{CA}} + \int_{\widehat{AC}} = 0$

மற்றும், $\int_{\widehat{ABC}} + \int_{\widehat{CDEA}} = \int_{\widehat{ABCDEA}} = \oint_C$

$$\iint_{R_1 + R_2} = \iint_R$$

$$\therefore \quad \oint_C M\ dx + N\ dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\ dy$$

துணை முடிவு :

R என்னும் ஓர் தனிமண்டலத்தில் $M(x, y)$, $N(x, y)$, $\frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial N}{\partial x}$ ஆகிய சார்புகள் தொடர்ச்சியானவையாயும், $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$ என்ற சமன்பாட்டுக்குட்பட்டிருந்தாலும், *R*–ல் உள்ள ஏதாவதொரு வளைகோடு *C* எனில்,

$$\int_C (M\ dx + Ndy) = 0 \text{ ஆகும்.}$$

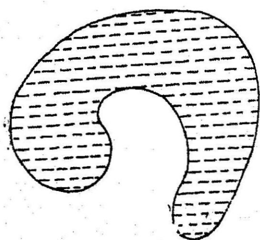
அல்லது $\int (M\,dx + N\,dy)$ என்ற கோட்டுவழித் தொகையானது, தொகைப் பாதை (path of integration) ஐச் சாராது (independent).

மேலும், $M\,dx + N\,dy$ என்பது ஒரு திருத்தமான வகையீடு (exact differential) ஆகும்.]

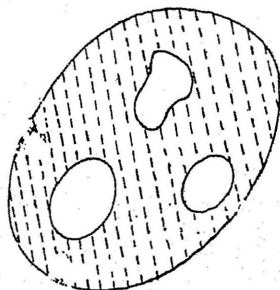
§ 53. ஒரு தொடர்பு மண்டலமும், பல தொடர்பு மண்டலமும் (Simply connected and multiply connected regions)

வரைவிலக்கணம் :

கொடுத்துள்ள மண்டலத்தில் அமையும் ஏதாவதொரு மூடிய வளைகோட்டை அந்த மண்டல எல்லையைக் கடக்காமல் அல்லது வெட்டாமல் தொடர்ச்சியாக ஒரு புள்ளியாகும் வரைச் சுருங்க வைக்க இயலுமாயின், அந்த மண்டலத்திற்கு ஒரு தொடர்பு மண்டலம் (simply connected region) என்று பெயர் (படம் 48).



படம்-48.



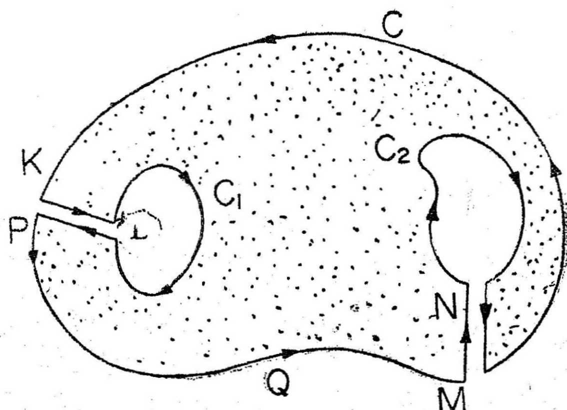
படம்-49.

ஒரு தொடர்பு இல்லாத மண்டலத்திற்குப் பல தொடர்பு மண்டலம் (multiply-connected region) என்று பெயர் (படம் 49).

ஒரு தொடர்பு மண்டலத்திற்கு ஒரு மூடிய வளைகோட்டு எல்லை மட்டுமே உண்டு. ஆனால், இரு தொடர்பு (doubly connected) மண்டலத்திற்கு இரண்டு வளைகோட்டு எல்லைகள் — ஒன்று வெளி எல்லை மற்றொன்று உள் எல்லை — உண்டு. இவ்வாறே n தொடர்பு (n-tuply connected) மண்டலத்திற்கு n வளைகோட்டு எல்லைகள் — ஒரு வெளி எல்லை, $n-1$ உள் எல்லைகள் — உண்டு என அறிக.

§ 54. பல தொடர்பு மண்டலத்தின் கிரீன் தேற்றம்

§ 52-ல் கிரீன் தேற்றத்தை ஒரு தொடர்பு மண்டலத்தை எடுத்துக் கொண்டு நிறுவியுள்ளோம். பல தொடர்பு மண்டலத்தில் கிரீன் தேற்றம் பின்வரும் மாறுதல் பெறும் :



படம்-50.

படம் 50-ல் காட்டியவாறு ஒரு முத்தொடர்பு (triply connectcd) மண்டலத்தை எடுத்துக் கொள்வோம்.

இந்த முத்தொடர்பு மண்டலத்தை ஒரு தொடர்பு மண்டலமாக மாற்றலாம். படத்தில் காட்டியவாறு, C-யுடன் உள் எல்லைகள் C_1, C_2-களை KL, MN ஆகிய குறுக்குப் பாதைகளால் (cross cuts) இணைக்கவும். இதனால் புள்ளிகளால் அடையாளம் செய்யப் பட்டுள்ள R-என்ற மண்டலம், இடஞ்சுழியாக வரையப்படும். ஒரே வளைகோட்டை எல்லையாகப் பெறும் என்று புலனாகிறது. அதாவது, R-மண்டலம், இப்போது ஒரு தொடர்பு மண்டலமாகி யுள்ளது.

$$\therefore \int_{\overparen{KPQM}} (Mdx + Ndy) + \int_{\overrightarrow{MN}} + \oint_{C_2} + \int_{\overrightarrow{NM}} + \int_{\overparen{MK}}$$

$$+ \int_{\overrightarrow{KL}} + \oint_{C_1} + \int_{\overrightarrow{LK}} = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx\, dy$$

ஆனால், $\displaystyle\int_{\overrightarrow{MN}} = -\int_{\overrightarrow{NM}}, \quad \int_{\overrightarrow{KL}} = -\int_{\overrightarrow{LK}}$

மற்றும், $\int_{\widehat{KPQM}} + \int_{\widehat{MK}} = \oint_C$

$$\therefore \oint_C (Mdx + Ndy) + \oint_{C_1} + \oint_{C_2} = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy$$

(இதை $n +$ தொடர்பு மண்டலத்திற்கும் பொதுமைப் படுத்தலாம்.)

[குறிப்பு : $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$ என்றால்

$$\oint_C + \oint_{C_1} + \oint_{C_2} = 0$$

$$\therefore \oint_C = \oint_{C_1} + \oint_{C_2}$$]

§ 55. கிரீன் துணைத்தேற்றம்

ஒரு தளத்திலுள்ள C என்ற எளிய மூடிய வளைகோட்டு எல்லைக்குள் அடங்கிய மண்டலத்தின் பரப்பு

$$= \frac{1}{2}\oint_C (xdy - ydx)$$

நிறுவல் :

மேற்கூறிய மண்டலத்தை R என்றும், அதன் பரப்பை A என்றும் குறிப்போம்.

இப்போது, $A = \iint_R dx\,dy$

கிரீன் தோற்றத்தில் $M = -y$, $N = x$ என்று பிரதியிட்டால்,

$$\int_C (-y\,dx + x\,dy) = \iint_R \left\{\frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(-y)\right\} dx\,dy$$

$$= \iint_R (1 + 1)\,dx\,dy$$

$$= 2A$$

$$\therefore A = \frac{1}{2}\oint_C (x\,dy - y\,dx)$$

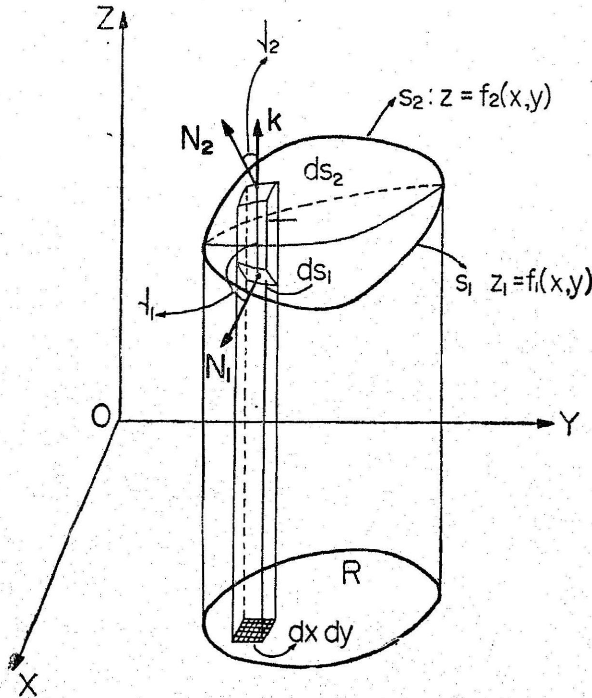
§ 56. காவுசின் பாய்வுத் தேற்றம் (Gauss's Divergence Theorem)

கொடுத்துள்ள S என்னும் ஒரு மூடிய வளைபரப்பில் அடங்கும் கன அளவு V என்க. S-ன் வெளிப்புற அலகுச் செங்கோட்டு வெக்டர் $\mathbf{N}$ எனக் குறித்து, அந்தக் கன உருவத்தில் அமையும் வெக்டர்களும் $\mathbf{F}$-ம் அதன் வகைக்கெழுவும் V-ல் தொடர்ச்சியாக உள்ளன எனில்,

$$\iiint\limits_V \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \oiint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS = \oiint\limits_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$$

நிறுவல் :

கொடுத்துள்ள வளைபரப்பு S ஓர் எளிய மூடிய வளைபரப்பு என்று எடுத்துக் கொள்வோம். அதாவது, x—, y—, z— அச்சுகளுக்கு இணையாக வரையப்படும் கோடுகள் Sஐ இரண்டுக்கு மேற்பட்ட புள்ளிகளில் வெட்டா.



படம்-51.

z அச்சுக்கு இணையாக S-க்கு வரையப்படும் தொடுகோடு களின் தொடுபுள்ளிகள், படம் 51-ல் உள்ளதுபோல, S-ன் மேல் உள்ள $\overset{\frown}{AB}$ என்னும் ஒரு மூடிய வளைகோட்டின் மேல் அமையும். $\overset{\frown}{AB}$ என்னும் மூடிய வளைகோடு, S ஐ இரண்டு பகுதிகளாகப் பிரிக்கிறது.

$\overset{\frown}{AB}$-ன் கீழ் உள்ள S-ன் பகுதியை S_1 என்றும், அதற்கு மேல் உள்ள பகுதியை S_2 என்றும் குறிப்போம். இந்த வளைபரப்புகளின் சமன்பாடுகள் முறையே

$$S_1 : z = f_1(x, y), \quad S_2 : z = f_2(x, y) \text{ என்க.}$$

xy தளத்தில் S, S_1, S_2 ஆகிய மூன்று வளை பரப்புகளின் குத்து வீச்சுகளும் ஒன்றே என எளிதில் அறியலாம். அதை R என்று குறிப்போம் (படம் 51).

வெக்டர் $\mathbf{F}$-ன் கூறுகள் F_1, F_2, F_3 என்றால்,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \{F_1(x, y, z)\}\mathbf{i} + \{F_2(x, y, z)\}\mathbf{j} + \{F_3(x, y, z)\}\mathbf{k}$$

இப்போது, $$I_1 = \iiint\limits_V \frac{\partial F_3}{\partial z}\, dV$$

என்ற கனவழித் தொகையை ஆராய்வோம்.

$$I_1 = \iiint\limits_V \frac{\partial F_3}{\partial z}\, dx\, dy\, dz$$

$$= \iint\limits_R \left[\int_{z=f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial F_3}{\partial z}\, dz \right] dy\, dx$$

$$= \iint\limits_R \left[F_3(x, y, z) \right]_{z=f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} dy\, dx$$

அதாவது,

$$I_1 = \iint\limits_R F_3\{x, y f_2(x, y)\}\, dx\, dy - \iint F_3\{x, y f_1(x, y)\}\, dx\, dy \quad \ldots (1)$$

S_2-வில் ஒரு மூலகம் dS_2 என்றும், இதன் அலகுச் செங்கோட்டு வெக்டர் N_2 என்றும் கொள்வோம். R-ல் dS_2-ன் குத்து வீச்சு $dx\ dy$ ஆகும்.

$$\therefore \quad dx\ dy = dS_2 \cos \gamma_2 = dS_2(\mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{k}) = (\mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{k})\ dS_2$$

அவ்வாறே S_1-ல் ஒரு மூலகம் dS_1 மற்றும் அதன் அலகுச் செங்கோட்டு வெக்டர் $\mathbf{N}_1$ எனக் கொள்க. R–ல் dS_1-ன் குத்து வீச்சு $dx\ dy$ ஆகும்.

ஆனல் $dx\ dy$ — $- dS_1 \cos \gamma_1$ (γ_1 ஒரு விரிகோணம் என்பதால் $\cos \gamma_1$ எதிர்க்குறியுடையதாகும்.)

$$\therefore \quad qx\ dy = -dS_1 (\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{k}) \qquad \text{(படம் 51)}$$
$$= -(\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{k})\ dS_1$$

இவற்றைச் சமன்பாடு (1)-ல் பயன்படுத்தினல்,

$$I_1 = \iiint\limits_V \frac{\partial F_3}{\partial z}\ dV$$
$$= \iint\limits_{S_2} F_3 \{ (x, y f_2(x, y)\} \mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{k}\ bS_2$$
$$- \iint\limits_{S_1} F_3 \ \{x, y, f_1(x, y)\}\ (-\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{k})\ dS_1$$
$$= \iint\limits_{S_2} F_3\ \mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{k}\ dS_2 + \iint\limits_{S_1} F_3\ \mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{k}\ dS_1$$
$$= \oiint\limits_S F_2\ \mathbf{N} \cdot \mathbf{k}\ dS$$

இவ்வாறே,

$$I_2 = \iiint\limits_V \frac{\partial F_1}{\partial x}\ dV = \oiint F_1\ \mathbf{N} \cdot \mathbf{i}\ dS$$

$$I_3 = \iiint\limits_V \frac{\partial F_2}{\partial y}\ dV = \oiint\limits_S F_2\ \mathbf{N} \cdot \mathbf{j}\ dS$$

$\therefore$ I_1, I_2, I_3 ஆகியவற்றைக் கூட்டினால்,

$$\iiint_V \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dV = \oint\!\!\oint (F_1\,\mathbf{i}+F_2\,\mathbf{j}+F_3\mathbf{k}).\mathbf{N}\,dS$$

$$\therefore \quad \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = \oint\!\!\oint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \oint\!\!\oint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$$

[குறிப்புகள் : (1) பாய்வுத் தேற்றத்தை எளிய மூடிய வளை பரப்பை எடுத்துக் கொண்டு நிறுவிய போதிலும், அந்தத் தேற்றம் எளியதல்லாத மூடிய வளைபரப்புக்கும் பொருந்தும் என்று அறிக. கொடுத்துள்ள வளைபரப்பைப் பல எளிய வளைபரப்புகளின் கூட்டுத் தொகை (sum) யாகக் கொண்டு, § 52 குறிப்பு 1-ல் விளக்கிய வாறு நிறுவலாம்.

(2) வளைபரப்பு S-ன் அலகுச் செங்கோட்டின் திசைக் கொசைன்கள் ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$) எனில்,

$$\mathbf{N}\cdot\mathbf{i} = \cos\alpha,\ \mathbf{N}\cdot\mathbf{j} = \cos\beta,\ \mathbf{N}\cdot\mathbf{k} = \cos\gamma$$

மேலும், $\mathbf{N} = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}$ என்றால்,

$$n_1 = \mathbf{N}\cdot\mathbf{i} = \cos\alpha$$

இதே போல், $n_2 = \cos\beta$, $n_3 = \cos\gamma$

$$\therefore \quad \mathbf{N} = (\cos\alpha)\mathbf{i}+(\cos\beta)\mathbf{j}+(\cos\gamma)\mathbf{k}$$

$$\therefore \quad \mathbf{F}\cdot\mathbf{N} = (F_1\mathbf{i}+F_2\mathbf{j}+F_3\mathbf{k}) \cdot \{(\cos\alpha)\,\mathbf{i}+(\cos\beta)\,\mathbf{j}+(\cos\gamma)\,\mathbf{k}\}$$
$$= F_1\cos\alpha + F_2\cos\beta + F_3\cos\gamma$$

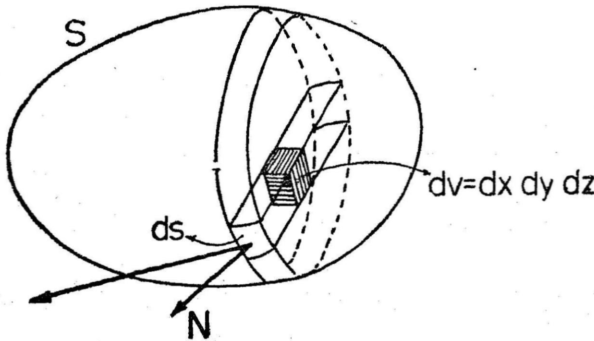
மேலும், $\nabla\cdot\mathbf{F} = \dfrac{\partial F_1}{\partial x} + \dfrac{\partial F_2}{\partial y} + \dfrac{\partial F_3}{\partial z}$

எனவே, பாய்வுத் தேற்றத்தைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\iiint_V \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dV$$
$$= \oint\!\!\oint_S (F_1\cos\alpha + F_2\cos\beta + F_3\cos\gamma)\,dS$$

இது பாய்வுத் தேற்றத்தின் கார்டீசிய வடிவமாகும்.

(3) பாய் பொருள் இயக்கவியலில் பாய்வுத் தேற்றத்தின் விளக்கம்



படம்-52.

S என்ற மூடிய வளை பரப்பினுள் ஏதேனுமொரு புள்ளியில் பாய் பொருளின் திசைவேகம் வெக்டர் V எனக் கொள்க. N வெளிப்புற அலகுச் செங்கோட்டு வெக்டர் என்றால், dS என்ற மேற்பரப்பு மூலகம் வழியாக ஓர் அலகு நேரத்தில் வெளியேறும் பாய் பொருளின் கன அளவு $= \mathbf{V} \cdot \mathbf{N}\, ds$ (படம் 52).

∴ ஓர் அலகு நேரத்தில் முழு பேற்பரப்பு S வழியாக வெளியேறும் பாய்பொருளின் கன அளவு $= \iint_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{N}\, dS$ ... (1)

ஆனால் § 40 குறிப்பு (1)-ல், ஓர் அலகு நேரத்தில் dV கன அளவுடைய மூலகம் வழியாக வெளியேறும் பாய்பொருளின் கன அளவு $\nabla \cdot \mathbf{V}\, dV$ என்று பார்த்தோம்.

∴ S-ல் அடங்கிய V என்ற முழு கன உருவத்தின் வழியாக வெளியேறும் பாய் பொருளின் கன அளவு

$$= \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{V}\, dV \quad \ldots \quad (2)$$

ஒரே அளவில் வெளியேறிய பாய் பொருளின் கன அளவானது இரு வெவ்வேறு முறைகளில் [(1)-ம் (2)-ம்] கணக்கிடப்பட்டுள்ளது.

$$\therefore \iint_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{N}\, ds = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{V}\, dv$$

(4) $\phi\ (x, y, z)$, $\psi\ (x, y, z)$ என்பவை, வளைபரப்பு S-ல் அடங்கிய V கன அளவு கொண்ட மண்டலத்தில் அமையும் எண்ணிக் களங்கள் எனில்,

$$\text{(i)} \quad \iiint\limits_V (\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi)\, dV$$

$$= \iint\limits_S (\phi \nabla \psi) \cdot \mathbf{N}\, ds$$

$$\text{(ii)} \quad \iiint\limits_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi)\, dV$$

$$= \iint\limits_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot \mathbf{N}\, ds$$

இவற்றை முறையே கிரீன் முதல் முற்றொருமை (Green's first Identity), கிரீன் இரண்டாவது முற்றொருமை (Green's second Identity) என்று வழங்குவர்.

நிறுவல் :

பாய்வுத் தேற்றத்தில் $\mathbf{F} = \phi \nabla \psi$ என்று பிரதியிடுக.

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot (\phi \nabla \psi) = \nabla \phi \cdot \nabla \psi + \phi\ \nabla \cdot \nabla \psi$$
$$= \nabla \phi \cdot \nabla \psi + \phi\ \nabla^2 \psi$$

$$\therefore \quad \oiint\limits_S (\phi \nabla) \cdot N\, ds = \iiint\limits_V \{ \nabla \cdot (\phi \nabla \psi) \}\, dV$$

$$= \iiint\limits_V (\nabla \phi \cdot \nabla \psi + \phi \nabla^2 \psi)\, dV \qquad \ldots \quad (1)$$

இவ்வாறே,

$$\oiint\limits_S (\psi \nabla \phi) \cdot \mathbf{N}\, ds = \iiint\limits_V (\nabla \psi \cdot \nabla \phi + \psi\ \nabla^2\ \phi)\, dV \ \ldots \ (2)$$

(1)-லிருந்து (2) ஐக் கழித்தால்,

$$\oiint\limits_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot \mathbf{N}\, ds = \iiint\limits_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi)\, dV \qquad \ldots \quad (3)$$

N திசையில் ϕ-ன் திசைவகைக் கெழுவை $\frac{d\phi}{dn}$ என்றும், ψ-ன் திசை வகைக் கெழுவை $\frac{d\psi}{dn}$ என்றும் குறிப்பது வழக்கம்.

மேலும், $\nabla\phi = \frac{d\phi}{dn}\mathbf{N}$; $\nabla\psi = \frac{d\psi}{dn}\mathbf{N}$; $|\mathbf{N}| = 1$

[§ 58 (இ) குறிப்பு]

இவற்றைப் பயன்படுத்தினால் சமன்பாடு (3) பின்வரும் வடிவம் பெறும்.

$$\iint\limits_S \left(\phi\frac{d\psi}{dn} - \psi\frac{d\phi}{dn}\right) ds = \iiint\limits_V (\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi)\, dV \quad \ldots (4)$$

§ 57. துணைத் தேற்றங்கள்

§ 57 1. வளை பரப்பு S-ல் அடங்கும் V கன அளவு கொண்ட மண்டலத்தில் $\phi(x, y, z)$ என்பது ஒரு எண்ணிக் களம். S-ன் வெளிப்புற அலகுச் செங்கோட்டு வெக்டர் N என்றால்

$$\iiint\limits_V \nabla\phi\, dv = \iint\limits_S \phi\,\mathbf{N}\, ds$$ [B.E. '69, '70]

நிறுவல் :

பாய்வுத் தேற்றத்தில் $\mathbf{F} = \phi\,\mathbf{C}$ எனப் பிரதியிடுக. (இங்கே C ஏதாவதொரு மாறா வெக்டர்)

பின்பு, $$\iiint\limits_V \nabla\cdot(\phi\mathbf{C})\, dV = \iint\limits_S (\phi\mathbf{C})\cdot\mathbf{N}\, dS$$

ஆனால், $\nabla\cdot(\phi\mathbf{C}) = (\nabla\phi\cdot\mathbf{C}) + \phi(\nabla\cdot\mathbf{C})$
$= \mathbf{C}\cdot\Delta\phi + 0$

(C மாறா வெக்டர் என்பதால் $\nabla\cdot\mathbf{C} = 0$)

மேலும், $(\phi\mathbf{C})\cdot\mathbf{N} = \mathbf{C}\cdot(\phi\mathbf{N})$

$$\therefore \iiint\limits_V \{\mathbf{C}\cdot(\nabla\phi)\}\, dV = \iint\limits_S \{\mathbf{C}\cdot(\phi\mathbf{N})\}\, dS$$

C மாறு வெக்டர் என்பதால் அதைத் தொகையிடல் குறிகளுக்கு வெளியே எழுதலாம்.

$$\therefore \quad \mathbf{C} \cdot \iiint_V \nabla\phi \, dV = \mathbf{C} \cdot \iint_S \phi \mathbf{N} \, dS$$

எந்த ஒரு மாறு வெக்டர் C-க்கும் இந்தச் சமன்பாடு பொருந்த வேண்டுமானால்,

$$\iiint_V \nabla\phi \, dV = \oiint_S \phi \mathbf{N} \, dS$$

[குறிப்பு : மேலே உள்ள சமன்பாட்டில்,

$\phi = 1$ என்றால், $\nabla\phi = 0 \quad \therefore \quad \iiint_V \nabla\phi \, dV = 0$

எனவே, $\oiint_S \mathbf{N} \, dS = 0$]

§ 57-2. வளை பரப்பு S-ல் அடங்கும் V கன அளவு கொண்ட மண்டலத்தில் அமையும் ஒரு வெக்டர் களம் **F** என்றும், S-ன் வெளிப்புற அலகுச் செங்கோட்டு வெக்டர் **N** என்றும் வைத்துக் கொண்டால்,

$$\iiint_V \nabla \times \mathbf{F} \, dV = \oiint_S \mathbf{N} \times \mathbf{F} \, dS \qquad \text{[B. E. '69, '70]}$$

நிறுவல்

C என்பது ஏதாவதொரு மாறு வெக்டர் எனக் கொண்டு வாய்வுத் தேற்றத்தில் F-க்குப் பதிலாக F×C என்று பிரதியிடுக.

$$\iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{F}\times\mathbf{C}) \, dV = \oiint_S (\mathbf{F}\times\mathbf{C}) \cdot N dS$$

ஆனால், $\nabla\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{C}) = \mathbf{C}\cdot(\nabla\times\mathbf{F}) - \mathbf{F}\cdot(\nabla\times\mathbf{C})$

$= \mathbf{C}\cdot(\nabla\times\mathbf{F}) - 0$

(C மாறு வெக்டர் என்பதால் $\nabla\times\mathbf{C} = 0$)

மேலும், $(\mathbf{F}\times\mathbf{C})\cdot\mathbf{N} = [\mathbf{F}\ \mathbf{C}\ \mathbf{N}]$

$$= [\mathbf{C}\ \mathbf{N}\ \mathbf{F}]$$

$$= \mathbf{C}\cdot(\mathbf{N}\times\mathbf{F})$$

$$\iiint_V \mathbf{C}\cdot(\nabla\times\mathbf{F})\,dV = \oiint_S \mathbf{C}\cdot(\mathbf{N}\times\mathbf{F})$$

C மாறு வெக்டர் என்பதால் அதைத் தொகையிடல் குறிகளுக்கு வெளியே எழுதலாம்.

$$\therefore\ \mathbf{C}\cdot\iiint_V (\nabla\times\mathbf{F})\,dV = \mathbf{C}\cdot\oiint_S (\mathbf{N}\times\mathbf{F})\,dS$$

எந்த ஒரு மாறு வெக்டர் C-க்கும் இந்தச் சமன்பாடு பொருந்த வேண்டுமானால்,

$$\iiint_V (\nabla\times\mathbf{F})\,dV = \oiint_S (\mathbf{N}\times\mathbf{F})\,dS$$

[குறிப்பு : மேலே கண்ட சமன்பாட்டில், $\mathbf{F} = \mathbf{R} = \Sigma\, x\mathbf{i}$ எனப் பிரதியிட்டால், $\nabla\times\mathbf{R} = 0$

$$\therefore\ \oiint_S (\mathbf{N}\times\mathbf{R})\,dS = 0]$$

§ 58. ஸ்டோக் தேற்றம்

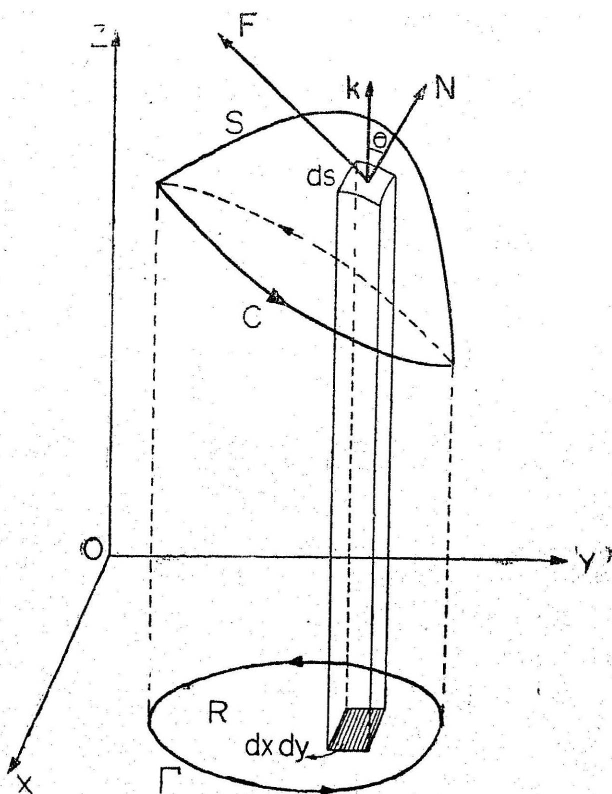
S என்பது இரு பக்கங்கள் கொண்டுள்ள திறந்த வளைபரப்பு (open two sided surface); மற்றும் C என்பது அதனுடைய எளிய மூடிய வளைகோட்டு எல்லை விளிம்பு (bounding curve) என்றும், S-ன் வெளிப்புற அலகுச் செங்கோட்டு வெக்டர் N என்றும், S-ன் மேல் அமையும் வெக்டர் களம் F-ம் அதன் வகைக்கெழுவும் தொடர்ச்சியான சார்புகளெனவும் எடுத்துக் கொண்டால்,

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = \iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S}$$

இடப்பக்கத்திலுள்ள கோட்டு வழித்தொகையை C-ன் நேர்த்திசையில் தொகையிடல் செய்யவேண்டும்.

[N திசைப் பக்கம் தலையை வைத்துக் கொண்டு எந்தத் திசையில் ஒருவர் C-ன் மேல் நடந்தால் அவருடைய இடப் பக்கத்தில் S அமையுமோ, அந்தத் திசை C-ன் நேர்த் திசை ஆகும்.]

xy-தளத்தில் வளைபரப்பு S-ன் குத்து வீச்சு, Γ என்ற வளை கோட்டை எல்லையாகக் கொண்ட மண்டலம் R என்போம். C எளிய, மூடிய வளைகோடு என்பதால், அதன் குத்து வீச்சு Γ-ம் எளிய மூடிய வளைகோடாகும் (படம் 53).



படம்-53.

S-ன் சமன்பாடு $S : z = f(x, y)$ என்றும், கொடுத்துள்ள வெக்டர் $\mathbf{F} = F_1(x, y, z)\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\mathbf{k}$ என்றும் எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$$

$$\nabla\times\mathbf{F} = \nabla\times F_1\,\mathbf{i} + \nabla\times F_2\,\mathbf{j} + \nabla\times F_3\,\mathbf{k}$$

எனவே,

$$\oint_C (F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz)$$

$$= \iint_S (\nabla F_1\,\mathbf{i} + \nabla\times F_2\,\mathbf{j} + \nabla\times F_3\,\mathbf{k})\cdot\mathbf{N}\,ds$$

என்று நிறுவ வேண்டும்.

முதலில், $\iint_S (\nabla\times F_1\,\mathbf{i})\cdot\mathbf{N}$ என்ற மேற்பரப்புத் தொகையை ஆராய்வோம்.

$$\nabla\times F_1\,\mathbf{i} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial F_1}{\partial z}\,\mathbf{j} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\,\mathbf{k}$$

$$\therefore\quad (\nabla\times F_1\,\mathbf{i})\cdot\mathbf{N} = \frac{\partial F_1}{\partial z}\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{N} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{N} \qquad \ldots \quad (1)$$

இப்போது, S-ன் சமன்பாடு $z = f(x, y)$ என்பதால், S-ன் மேல் உள்ள ஏதாவதொரு புள்ளி $P\ (x, y, z)$-ன் நிலை வெக்டரை

$$\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \{f(x, y)\}\,\mathbf{k}$$

என்று எழுதலாம்.

$$\therefore\quad \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial y} = \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{k}$$

$$= \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial y}\,\mathbf{k} \qquad [\because\ z = f(x, y)]$$

ஆனால், $d\mathbf{R}$ என்பது P-ல் அமையும் தொடுகோட்டு வெக்டர் என நாம் அறிவோம் (§ 29). ஆகவே, $\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial y}$ என்பதும் P-ல் அமையும் ஒரு தொடுகோட்டு வெக்டராகும்.

$$\therefore \quad \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y} \perp \mathbf{N} \text{ அல்லது } \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y} \cdot \mathbf{N} = 0$$

அதாவது,

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{N} + \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{k} \cdot \mathbf{N} = 0 \qquad \dots \quad (2)$$

(2)ஐ (1)-ல் பயன்படுத்தினால்,

$$(\nabla \times F_1 \mathbf{i}) \cdot \mathbf{N} = -\frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{k} \cdot \mathbf{N} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \mathbf{k} \cdot \mathbf{N}$$

$$\therefore \quad (\nabla \times F_1 \mathbf{i}) \cdot \mathbf{N}\, ds = -\left(\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y}\right) \mathbf{k} \cdot \mathbf{N}\, ds \qquad \dots \quad (3)$$

$z = f(x, y)$ என்பதால்,

$F_1(x, y, z) = F_1\{x, y, f(x, y)\} = \psi(x, y)$ என்க. ... (4)

$$\therefore \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad \dots \quad (5)$$

(3), (5)ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$$(\nabla \times F_1 \mathbf{i}) \cdot \mathbf{N}\, ds = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \mathbf{k}\, \mathbf{N}\, ds \qquad \dots \quad (6)$$

ஆனால், § 49-ல் கொடுத்துள்ள விளக்கத்தின்படி,

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{N}\, ds = dx dy$$

$$\therefore \iint_S (\nabla \times F_1 \mathbf{i}) \cdot \mathbf{N}\, dS = -\iint_R \frac{\partial \psi}{\partial y}\, dx\, dy$$

$$= \oint_\Gamma \psi\, dx \qquad \text{[கிரீன் தேற்றம்]} \qquad \dots \quad (7)$$

இப்பொழுது, Γ-ன் மேல் உள்ள (x, y) புள்ளியில் $\psi(x, y)$-ன் (x, y, z) புள்ளியில் மதிப்பும், அதற்கு ஒத்துள்ள (corresponding) C-ன் மேலுள்ள $F_1(x, y, z)$-ன் மதிப்பும் $\{z = f(x, y)$ என்பதால்$\}$ சமமாகையால் [சமன்பாடு (4)].

$$\oint_\Gamma \psi\, dx = \oint_C F_1\, dx \qquad \dots \quad (8)$$

எனவே, (7), (8) சமன்பாடுகளிலிருந்து

$$\iint_S (\nabla \times F_1\mathbf{i})\cdot\mathbf{N}\, dS = \oint_C F_1\, dx$$

இவ்வாறே $$\iint_S (\nabla \times F_2\mathbf{j})\cdot\mathbf{N}\, dS = \oint_C F_2\, dy$$

மற்றும் $$\iint_S (\nabla \times F_3\mathbf{k})\cdot\mathbf{N}\, dS = \oint_C F_3\, dz$$

இவற்றைக் கூட்டினால்

$$\iint_S \{\nabla\times(F_1\mathbf{i}+F_2\mathbf{j}+F_3\mathbf{k})\}\cdot\mathbf{N}\, dS = \oint_C (F_1\, dx+F_2\, dy+F_3\, dz)$$

அதாவது, $$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F})\cdot\mathbf{N}\, dS = \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$$

[குறிப்பு: (1) வளைபரப்பு S–ன் அலகுச் செங்கோட்டு வெக்டர் **N**-ன் திசைக் கொசைன்கள் ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$) என்றால்,

$$\mathbf{N} = (\cos\alpha)\mathbf{i} + (\cos\beta)\mathbf{j} + (\cos\gamma)\mathbf{k} \quad [\S\ 56 \text{ குறிப்பு } (2)]$$

$$\nabla\times\mathbf{F} = \sum\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i}$$

$$\therefore\quad (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{N} = \sum\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\cos\alpha$$

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = \Sigma F_1\, dx$$

$\therefore$ ஸ்டோக் தேற்றம் பின்வரும் வடிவம் பெறும்

$$\oint_C (F_1\, dx+F_2\, dy+F_3\, dz)$$

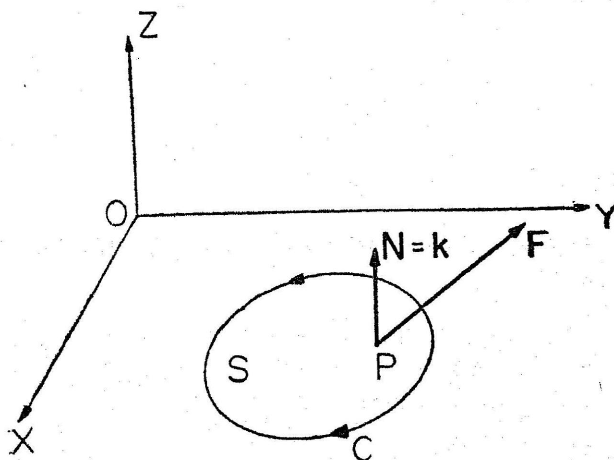
$$= \iint_S \left\{\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\cos\gamma\right\} ds$$

இதை, ஸ்டோக் தேற்றத்தின் கார்ட்டீசியன் வடிவம் எனலாம்.

(2) கிரீன் தேற்றம் ஸ்டோக் தேற்றத்தின் துணை வகை (particular case) ஆகும்.

S என்பது C என்ற எளிய மூடிய வளைகோட்டை எல்லையாகக் கொண்ட xy-தளத்திலுள்ள ஒரு தள மண்டலம் (plane region) என்றும், S-ன் மேல் அமையும் வெக்டர் களம்

$\mathbf{F}\ (x, y) = \{M(x, y)\}\ \mathbf{i} + \{N(x, y)\}\ \mathbf{j}$ என்றும் கொள்வோம்.



படம்–54.

S-ன் மேல் ஏதாவதொரு புள்ளி $P(x, y)$-ன் நிலை வெக்டர்

$$\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

$$\therefore\ \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = Mdx + Ndy$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M & N & O \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{\partial N}{\partial z}\mathbf{i} + \frac{\partial M}{\partial z}\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

S-ன் அலகுச் செங்கோட்டு வெக்டர் $\mathbf{N} = \mathbf{k}$

$$\therefore \quad (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

மேலும், $dS = dx\, dy$

$$\therefore \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\, dS$$

என்ற ஸ்டாக் தேற்றம் பின்வரும் வடிவம் பெறும்.

$$\oint_C (M dx + N dy) = \iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx\, dy$$

இதுவே, கிரீன் தேற்றம் ஆகும்.

(3) ஸ்டோக் தேற்றத்திலிருந்து பெறப்படும் இயக்க வியல் துணை முடிவு :

S-ன் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் தொடர்ச்சியான விசை வெக்டர் களம் $\mathbf{F}$ உண்டென்போம். அது ஒரு காப்பு நிலை அல்லது சுழலிலா வெக்டர் களம் என்ருல், $\nabla \times \mathbf{F} = 0$

இதனுல். ஸ்டோக் தேற்றத்திலிருந்து

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = 0$$

என்று பெறுவோம்.

ஆனுல், $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$ என்பது விசை வெக்டர் $\mathbf{F}$, ஒரு துகளை முழுவதுமாக ஒரு முறை C என்ற வளைகோட்டின்மேல் நகர்த்துவதற்காகச் செய்யும் வேலையைக் குறிக்கும்.

எனவே, S என்னும் வளைபரப்பின்மேல் அமையும் காப்புநிலை வெக்டர் களத்தில் உள்ள ஒரு துகளை S-ல் அமையும் எந்த ஒரு மூடிய வளைகோட்டின்மேல் முழுமையாக ஒரு முறை நகர்த்துவதற்குச் செய்யும் வேலையின் மதிப்பு சுழி (பூச்சியம்) ஆகும்.

இதையே வேறுவிதமாகக் கூறினால்,

காப்புநிலை வெக்டர் களத்தில், ஒரு விசை ஒரு துகளை நகர்த்துவதற்காகச் செய்யும் வேலையின் மதிப்பானது, அந்தத் துகளின் தொடக்கப்புள்ளி முடிவுப்புள்ளி ஆகியவற்றை மட்டும் சார்ந்தது; அந்தத் துகள் நகரும் பாதையைச் சார்ந்ததல்ல.

(4) ϕ என்பது ஓர் எண்ணிச் சார்பு என்றால் $\nabla\times(\nabla\phi)=0$ என்ற விளைவு ஸ்டோக் தேற்றத்திலிருந்தும் பெறலாம்.

ஸ்டோக் தேற்றத்தில் $F=\nabla\phi$ எனப் பிரதியிட்டால்,

$$\iint_S \{\nabla\times(\nabla\phi)\}\cdot\mathbf{N}\,ds = \oint_C \nabla\phi\cdot d\mathbf{R}$$

$$= \oint_C d\phi$$

$$= [\phi(x,y,z)]_C = 0$$

இது எந்த ஒரு வளைபரப்பிற்கும் பொருந்துவதால்

$$\nabla\times(\nabla\phi)=0$$

59. கிரீன், காவுசு, மற்றும் ஸ்டோக் தேற்றங்களின் பயன்கள்

கோட்டுவழித் தொகை, புறப்பரப்பு வழித்தொகை, கனவழித் தொகை ஆகியவற்றில் ஒன்றை மற்றொரு வடிவத்தில் மாற்றுவதற்கு மேற்கண்ட தேற்றங்கள் பயன்படுவதால், அவற்றுக்கு மாற்றத் தேற்றங்கள் (Transformation Theorems) என்றும் பெயர் உண்டு.

(1) இயற்பியலில் புவி ஈர்ப்பு அழுத்தத்தின் (Gravitational Potential) பண்புகளை விளக்கும்.

$$\nabla^2\phi = -4\pi\rho(x,y,z)$$

(ϕ = புவிஈர்ப்பு அழுத்தச் சார்பு, ρ = பொருளின் (x, y, z) என்னும் புள்ளியில் அடர்த்தி) என்னும் பாய்சான் (Poisson) சமன்பாடு காண்பதற்கும்,

(2) மின்னியலில் மின்செறிவை விளக்கும்

$$\nabla^2\mathbf{E} = \mu\epsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

($\mathbf{E}$ = மின்செறிவு (Electric intensity) வெக்டர்,

μ = மின், உட்புகுதிறன் (Permeability)

ϵ = (Permittivity)

என்னும் மாக்சுவெல் (Maxwell) சமன்பாடு அடைவதற்கும்,

(3) இரு பரிமாண வெளியில் இயக்கும் பாய்பொருளின் நிலைத்த பாய்வின் (steady flow) போது, திசைவேகப் பண்பு $\phi(x, y)$ (velocity potential) மற்றும் ஓட்டச் செயற் கூறு $\psi(x, y)$ (Stream function) ஆகியவற்றின் தொடர்பைக் குறிக்கும்

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}\,;\; \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

என்னும் கோஷி-ரீமான் (Cauchy-Riemann) சமன்பாடுகளைப் பெறுவதற்கும்.

(4) நீரியக்கவியலில் (Hydrodynamics)

$$\rho \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = F\rho - \nabla p$$

($\mathbf{R}$ = நீர்த்துகளின் நிலை வெக்டர், ρ = அடர்த்தி,

F = பொருள் விசை (body force), p = அழுத்தம்)

என்னும் பெர்னுல்லி (Bernouilli) யின் சமன்பாடு காண்பதற்கும்,

(5) வெப்பக் கடத்தல் கோட்பாடு தரும்

$$\frac{\partial u}{\partial t} = h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

(u = வெப்பநிலை (temperature), h = மாறு எண்ணி)

என்னும் பூரியர் (Fourier) சமன்பாட்டைப் பெறுவதற்கும்,

(6) மீட்சியலில் (Elasticity)

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho X_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

(σ_{ij} = தகைவுச் சார்புகள் (strain function),

X = பொருள்விசை, ρ = அடர்த்தி)

என்னும் சமநிலைச் சமன்பாடுகளைப் (Equations of Equilibrium) பெறுவதற்கும்,

மற்றும், மீட்சியுரு நிலையியல் (Plasticity), ஒலியியல் (Acoustics), கட்டிறுக்கப் பொருள் இயக்கவியல் (Rigid body Dynamics), ஒலியியல் (Sound theory), குவாண்டம் இயக்கவியல் (Quantum Mechanics), மேற்பரப்பு வடிவக் கணக்கியல் (Geometrical theory of Surfaces) முதலியவற்றிலும் மேற்கண்ட மூன்று தேற்றங்களும் அவற்றின் துணைத் தேற்றங்களும் இன்றியமையாதவையாக இருந்து பயனளிக்கின்றன.

கூடுதல் விளக்கம் வேண்டுவோர்

(i) C. R. Wylie Tr., Advanced Engineering Mathematics—op. cit., pp. 585—591.

(ii) I. S. Sokolnikoff and R.M. Redheffer, Mathematics of Physics and Modern Engineering—op. cit.—p p. 408—420.

(iii) M. Filonenko—Borodich—Theory of Elasticity—p. 22.

ஆகியவற்றில் காணலாம்.

மாதிரிக்கணக்கு (1)

மையம் ஆதியிலும், ஆரம் 2 அலகு ஆகவும் உள்ள வட்டம் C என்றால்,

$$I = \oint_C \{(x^2+y^2)\,dx + 3xy^2\,dy\}$$

என்ற கோட்டு வழித் தொகையை நேர் முறையிலும், கிரீன் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தியும் கணக்கிடுக.

நேர் முறையில் I காணல்

$x^2 + y^2 = 2^2$ என்ற வட்டத்தின் துணையலகுச் சமன்பாடுகள்

$$x = 2\cos\theta,\ y = 2\sin\theta$$

$$\therefore\quad dx = -\,2\sin\theta\,dy,\quad dy = 2\cos\theta\,d\theta$$

மேலும், θ-ன் மாறல் : $\theta = -\pi$ முதல் $\theta = \pi$ வரை

($\theta = 0$ முதல் $\theta = 2\pi$ என்றும் எடுத்துக் கொள்ளலாம்.)

$$\therefore\quad I = \int_{-\pi}^{\pi} \{ (4\cos^2\theta + 4\sin^2\theta)(-2\sin\theta\, d\theta)$$

$$+ 3\cdot 2\cos\theta \cdot 4\sin^2\theta \cdot 2\cos\theta\, d\theta \}$$

$$= -8 \int_{-\pi}^{\pi} \sin\theta\, d\theta + 48 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2\theta \sin^2\theta\, d\theta$$

$$= 0 + 96 \int_{0}^{\pi} \sin^2\theta \cos^2\theta\, d\theta \quad [\S 51\cdot 3,\ \S 51\cdot 2]$$

$$= 192 \int_{0}^{\pi/2} \sin^2\theta \cos^2\theta\, d\theta \quad [\S 51\cdot 4]$$

$$= 192 \cdot \frac{1\cdot 1}{4\cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} \qquad [\S 51\cdot 6]$$

$$= 12\pi.$$

கிரீன் தேற்றம் வழி I காணல்

இங்கே, $M = x^2 + y^2$, $N = 3xy^2$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3y^2$$

$$\therefore\quad \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 3y^2 - 2y$$

கிரீன் தேற்றத்தின்படி

$$I = \iint_R (3y^2 - 2y)\, dx\, dy \qquad \ldots \quad (1)$$

இங்கே R என்பது $x^2 + y^2 = 4$ என்ற வட்ட மண்டலம்

$$\therefore\quad I = \int_{y=-2}^{2} \left\{ (3y^2 - 2y) \int_{x=-\sqrt{4-y^2}}^{+\sqrt{4-y^2}} dx \right\} dy$$

$$= \int_{y=-2}^{2} (3y^2 - 2y)\{ 2\sqrt{4-y^2} \} dy$$

$$= 6 \int_{-2}^{2} y^2\sqrt{4-y^2}\, dy - 4 \int_{-2}^{2} y\sqrt{4-y^2}\, dy$$

$$= 12 \int_{0}^{2} y^2 \sqrt{4-y^2}\, dy - 0 \qquad [\S\, 51{\cdot}2,\ \S\, 51{\cdot}3]$$

$y = 2 \sin \theta$ என்று பிரதியிடுக.

$dy = 2 \cos d\theta$

y-ன் எல்லைகள் (0, 2) என்பதால் θ-ன் எல்லைகள் $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\therefore\ I = 12 \int_{0}^{\pi/2} (2 \sin \theta)^2 \cdot 2 \cos \theta \cdot 2\cos\theta\, d\theta$$

$$= 192 \int_{0}^{\pi/2} \sin^2\theta \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= 192 \frac{1\cdot 1}{4\cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= 12\pi$$

மாற்று வழி

சமன்பாடு (1)-ல் உள்ள மேற்பரப்பு வழித் தொகையைத் துருவ ஆயத் தொலைகளுக்கு மாற்றியமைத்த பின்பு தொகை காணல் எளிதாகும்.

$x^2 + y^2 = 4$ என்பதன் துருவ ஆயத் தொலை வடிவம் :

$$x = r \cos \theta,\ y = r \sin \theta$$

$$dx\, dy = r\, d\theta\, dr,$$

r-ன் மாறல் : $r = 0$ முதல் $r = 2$ வரை.

θ-வின் மாறல் : $\theta = -\pi$ முதல் $\theta = \pi$ வரை.

$$\therefore \quad I = \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \int_{r=0}^{2} (3\, r^2 \sin^2\theta - 2\, r \sin\theta)\, r dr\, d\theta$$

$$= \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \left[\frac{3}{4} r^4 \sin^2\theta - \frac{2}{3} r^3 \sin\theta \right]_{r=0}^{2} d\theta$$

$$= 24 \int_0^{\pi} \sin^2\theta\, d\theta = 48 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\, d\theta$$

$$= 48 \cdot \frac{\pi}{4} = 12\pi$$

மாதிரிக்கணக்கு (2)

$$\int_{(0,\,0)}^{(\pi,\,2)} \{ (6xy - y^2)\, dx + 3x^2 - 2xy\, dy \}$$

என்ற கோட்டுவழித் தொகையை

$$x = \theta - \sin\theta, \quad y = 1 - \cos\theta$$

என்ற உருள்வளை (cycloid) பாதையில் கணக்கிடுக.

(படம் 55-ஐப் பார்க்கவும்.)

இங்கே, $M = 6\, xy - y^2$, $N = 3x^2 - 2\, xy$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = 6\, x - 2y = \frac{\partial N}{\partial x}$$

மேலும், M, N, $\frac{\partial N}{\partial x}$, $\frac{\partial M}{\partial y}$ ஆகியவை உருள்வளை மண்டலத்தில் தொடர்ச்சியான சார்புகள்.

மற்றும், $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0$ என்பதால்,

$\int_{(0,0)}^{(\pi,2)} (Mdx + Ndy)$ என்ற கோட்டு வழித் தொகையானது படம் 55-ல் $O(0, 0)$, $N(\pi, 2)$ என்ற தொடக்க முடிவுப்